Die Eulersche Zahl e und die Exponentialfunktion e^x

(Leonhard Euler, 1707 – 1783, St. Petersburg, Begründer der Analysis [1748])

Zahlenfolge:
Im ausgehenden 17. Jh. wurden zahlreiche Zahlenfolgen untersucht, das sind Folgen von Zahlen, die einem bestimmten Berechnungsmuster folgen. Leonhard Euler fand dabei heraus, dass die Zahlenfolge

$$1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{120}+...$$

einem bestimmten Zahlenwert zustrebt, der heute als Eulersche Zahl bekannt ist und mit dem Buchstaben e abgekürzt wird.

Das Bildungsgesetz der einzelnen Summanden verwendet dabei die Fakultät einer Zahl, abgekürzt mit n! (gesprochen: „n-Fakultät"), wobei gilt:

$$n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot ...\cdot n \qquad \text{und} \qquad 0! := 1$$

also z.B.

$$5! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 120$$

Damit lässt sich die Eulersche Zahlenfolge auch darstellen als

$$\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+... = \sum_n \frac{1}{n!}$$

Das Besondere einer solchen Zahlenfolge ist die Tatsache, dass sie sich mit zunehmender Zahl der Summanden immer weiter einem bestimmten Wert annähert (Konvergenz). Im Falle der Eulerschen Zahl ist dies der Zahlenwert

$$e = 2{,}718281828459045... \qquad (1)$$

Potenzreihe:
Eine besondere Form dieser Zahlenfolge erhielt Euler, wenn er die 1 in der Zahlenfolge durch x^n ersetzte. Daraus ergibt sich eine besondere Form einer Potenzfunktion:

$$f(x) = \frac{x^0}{0!}+\frac{x^1}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+... = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} \qquad (2)$$

Euler fand heraus, dass die Summe dieser Summanden nach (2) mit dem Zahlenwert einer speziellen Exponentialfunktion übereinstimmt, die als Basis eben diese Eulersche Zahl e (siehe 1) verwendet:

$$e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$$

Ableitung:
Dieses hat für die Ableitung einer Funktion eine ganz besondere Bedeutung, denn leitet man die Summanden von (2) nach x ab, erhält man mit den üblichen Ableitungsregeln für Potenzen und nach Kürzen der entstehenden Faktoren gegen den jeweils letzten Faktor der Fakultät im Nenner

$$f'(x) = \frac{0\cdot x^{-1}}{1}+\frac{1x^0}{1}+\frac{2x^1}{1\cdot 2}+\frac{3x^2}{1\cdot 2\cdot 3}+... = 0+\frac{x^0}{1}+\frac{x^1}{1}+\frac{x^2}{1\cdot 2}+... = \frac{x^0}{0!}+\frac{x^1}{1!}+\frac{x^2}{2!}+... = f(x)$$

Die Ableitung dieser Funktion stimmt also mit ihrer Ausgangsfunktion überein, es gilt also

$$\frac{d}{dx}\left(e^x\right) = e^x$$

Das Anwenden weiterer Ableitungsregeln (Faktorregel, Kettenregel) ergibt somit für die allgemeine Exponentialfunktionen zur Basis e die folgende Ableitung:

$$\frac{d}{dx}\left(a\cdot e^{b\cdot x}\right) = a\cdot b\cdot e^{b\cdot x} \Rightarrow f'(x) = b\cdot f(x) \qquad (3)$$

Die Ableitung dieser Funktion stimmt also bis auf einen konstanten Faktor mit der Ausgangsfunktion überein. Aus diesem Grund lassen sich Vorgänge, die sich durch eine Exponentialfunktion zur Basis e beschreiben lassen, besonders einfach differenzieren und somit auch integrieren.