Allgemeine Hinweise zu den Aufgaben:

Zunächst sollte versucht werden, die Aufgaben ausschließlich unter der Verwendung derjenigen Hilfsmittel zu bearbeiten, die auch in Klausuren zugelassen sind, also Formelsammlung und Taschenrechner. Weitere Hilfsmittel (Scripte, Aufzeichnungen, Lehrbuch) sollten erst dann hinzugezogen werden, wenn auch nach längerem Nachdenken kein zielführender Lösungsansatz gefunden werden kann. Der Zeitbedarf pro Aufgabe lieg bei ca. 30 - 90 Minuten.
Der einleitende Text beschreibt einen Sachverhalt und kennzeichnet relevante Größen. Die nachfolgenden Arbeitsaufträge definieren die entsprechende Fragestellung.
Vor einer Lösung der Aufgaben sollte in jedem Fall zunächst der entsprechende Versuchsaufbau skizziert, angemessen beschriftet und verbal der Aufbau und ggf. detaillierter als im einleitenden Text die Durchführung, erwartete Beobachtungen sowie das Versuchsziel beschrieben werden.
Nach der Lösung von Aufgaben, die die Herleitung einer Formel enthalten, sollten geeignete konkrete Werte sinnvoll ausgewählt und eingesetzt werden, um die Größenordnungen abschätzen zu lernen.

Ü-6 (Entstehung einer elektromagnetischen Schwingung)

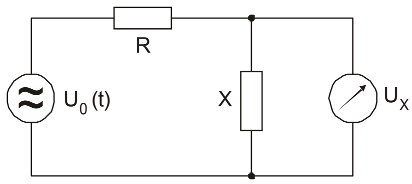
In der Parallelschaltung eines Kondensators der Kapazität C mit einer Spule der Induktivität L wird an die beiden Platten des Kondensators eine Spannung U_0 angegelgt. Zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ wird die Spannungsquelle entfernt und der Verlauf der Kondensatorspannung $U_C(t)$ mit einem Oszillsokop graphisch dargestellt.

a) Beschreiben Sie die in der Schaltung ablaufenden Vorgänge ab dem Zeitpunkt t_0, gehen Sie dabei auch auf die entsprechenden Energieumwandlungsprozesse ein.

b) Leiten Sie die entsprechenden Gleichungen her, die den Verlauf der Spannung am Kondensator und den Verlauf des Stroms durch die Spule in Abhängigkeit von der Zeit darstellen und stellen Sie diese graphisch dar.

U-7 (Wechselstromwiderstände)

In dem Versuch laut nebenstehender Skizze wird X zunächst durch einen Kondensator mit der Kapazität C, anschließend durch eine Spule mit der Induktivität L ersetzt. Die in der Frequenz f einstellbare Spannungsquelle erzeugt eine sinusförmige Wechselspannung $U_0(t)$ mit konstanter Amplitude.



a) Leiten Sie jeweils für den Kondensator und die Spule die entsprechenden Gleichungen her, mit denen eine Aussage über die Amplitude der zu messenden Spannung $U_X(f)$ gemacht werden kann.

b) Erläutern Sie den Begriff „Wechselstromwiderstand", gehen Sie dabei auch auf die Phasenbeziehungen zwischen $U_0(t)$ und $U_X(t)$ ein und stellen Sie diese durch eine geeignetes Zeigerdiagramm dar.

Ü-8 (Resonanzkreise)

In dem Versuch nach der Skizze zu (Ü-7) wird X nacheinander zunächst durch die Parallelschaltung eines Kondensators mit der Kapazität C und einer Spule mit der Induktivität L, anschließend durch eine Reihenschaltung der beiden Elemente ersetzt.

a) Skizzieren Sie jeweils den zu erwartenden Spannungsverlauf für $U_X(f)$ und begründen Sie sein Zustandekommen mit Hilfe der Wechselstromwiderstände von Kondensator und Spule.

b) Zeigen Sie, dass sich die Thomsonsche Schwingungsformel sowohl aus der Differentialgleichung nach (Ü-6) als auch aus der Formel für die Gesamtimpedanz der LC-Resonanzkreise ableiten lässt.

Ü-9 (Gedämpfte Schwingungen)

Ein realer LC-Schwingkreis erzeugt nach einmaliger Anregung eine Schwingung, deren Amplitude mit der Zeit t abnimmt.

a) Begründen Sie die Amplitudenabnahme aus energetischer Sicht. Geben Sie die entsprechende Gleichung für $U_X(t)$ einer gedämpften Schwingung an, erläutern Sie deren Komponenten und skizzieren Sie ihren prinzipiellen Verlauf.

b) Beschreiben Sie, durch welche Maßnahmen man unter Verwendung realer LC-Schwingkreise eine ungedämpfte harmonische Schingung erzeugen kann und geben Sie eine entsprechende Schaltung an.

Ü-10 (Elektrischer Dipol)

Ein elektrischer Dipol, der durch einen in der Mitte geteilten Metallstab der Länge ℓ gebildet wird, kann als „entarteter" LC-Kreis betrachtet werden.

a) Erläutern Sie, welche Schritte vom LC-Kreis zum Dipol führen und erläutern Sie, in welcher Weise dieser Dipol eine elektro-magnetische Welle aussendet.

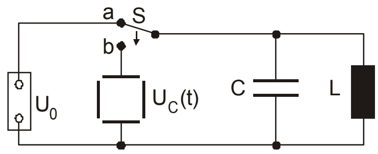
b) Zeigen Sie, dass die Länge ℓ des Dipols entscheidend für die Frequenz f_0 ist, bei der die Amplitude der erzeugten elektro-magnetischen Welle maximal ist.

Lsg. Ü-6

Versuchsziel: Darstellung des Spannungsverlaufes in einem LC-Parallelschwingkrreises

Aufbau: siehe einleitender Text zur Aufgabenstellung

Skizze: siehe Abbildung rechts



Durchführung: Die Spannungsquelle lädt den Kondensator auf die Spannung U_0 auf, solange der Schalter S in Stellung a (wie eingezeichnet) steht. Zum Zeitpunkt $t = t_0$ wird der Schalter in Stellung b gebracht. Auf dem Oszilloskop wird nun der zeitliche Verlauf der Spannung am Kondensator dargestellt.

a) Zum Zeitpunkt t_0 ist die Spannung am Kondensator gleich U_0. Die im Kondensator gespeicherte Energie berechnet sich zu

$$E_C(t_0) = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U_0^2 \tag{6.1}$$

Die auf den Kondensatorplatten gespeicherte Ladung Q fließt über die Spule ab, dabei fließt ein Strom, der zu einem die Spule durchsetzenden Magnetfeld führt. Die an der Spule durch Selbstinduktion entstehende Spannung ist zu jedem Zeitpunkt genau so groß wie die Spannung am Kondensator. Da die Induktionsspannung einer Induktivität L proportional zur Änderungsgeschwindigkeit des Stromes ist, ist der Strom zu Beginn der Kondensatorentladung Null und steigt bis zu einem Maximalwert, der erreicht wird, wenn der Kondensator vollständig entladen ist. Die zuvor gespeicherte Energie ist zu diesem Zeitpunkt t_1 dann vollständig im magnetischen Feld der Spule gespeichert. Es gilt

$$E_L(t_1) = \frac{1}{2} \cdot L \cdot I(t_1)^2 \tag{6.2}$$

Da die Ursache für das Entstehen des Stromes nun weggefallen ist, nimmt der Strom nun wieder ab, an der Spule entsteht wiederum durch Selbstinduktion eine Spannung mit umgekehrtem Vorzeichen, die den Kondensator wieder auflädt. Wenn der Strom den Wert Null erreicht, ist der Kondensator vollständig aufgeladen, allerdings hat sich das Vorzeichen der Spannung geändert. Anschließend beginnt mit umgekehrtem Vorzeichen der gleiche Prozess.

b) Im diesem Stromkreis kann man den geladenen Kondensator als Spannungsquelle und die Induktivität als Leiter ansehen. Der dabei entstehende zeitlich veränderliche Strom I(t) führt zu einer Induktionsspannung $U_L(t)$, für die gilt:

$$U_L(t) = -L \cdot \dot{I}(t) \tag{6.3}$$

Wegen der Parallelschaltung ist zu jedem Zeitpunkt t die Spannung an der Spule genau so groß wie die Spannung am Kondensator, es gilt also

$$U_C(t) = U_L(t) \tag{6.4}$$

Da die Ladungen durch die Induktivität abfließen, ändert sich die Ladung Q(t) auf den Platten des Kondensators. Für die Spannung $U_C(t)$ erhält man somit

$$U_C(t) = \frac{Q(t)}{C} \tag{6.5}$$

Einsetzen von (6.3) und (6.5) in (6.4) ergibt

$$\frac{Q(t)}{C} = -L \cdot \dot{I}(t) \tag{6.6}$$

Da der Strom definiert ist als die Ableitung der Ladung Q(t) nach der Zeit, erhält man

$$\frac{1}{C} \cdot Q(t) + L \cdot \ddot{Q}(t) = 0 \tag{6.7}$$

Dies ist eine homogene Differentialgleichung 2. Ordnung. Mit dem Lösungsansatz

$$Q(t) = Q_0 \cdot \cos(\omega \cdot t)\,, \qquad \dot{Q}(t) = -\omega \cdot Q_0 \cdot \sin(\omega \cdot t) \tag{6.8a}$$

$$\ddot{Q}(t) = -\omega^2 \cdot Q_0 \cdot \cos(\omega \cdot t) = -\omega^2 \cdot Q(t) \tag{6.8b}$$

erhält man

$$\frac{1}{C} \cdot Q(t) - L \cdot \omega^2 Q(t) = 0 \qquad \left| + L \cdot \omega^2 Q(t) \right.$$

$$\frac{1}{C} \cdot Q(t) = L \cdot \omega^2 Q(t) \qquad \left| : L \cdot Q(t) \right.$$

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{L \cdot C}} \qquad (6.9)$$

Es ergibt sich also ein periodischer Verlauf der Spannung mit der Kreisfrequenz ω, wobei sich die Spannung sinusförmig zwischen zwei betragsgleichen Maximalwerten mit entgegengesetzten Vorzeichen ändert. Für die Frequenz dieser harmonischen Schwingung erhält man

$$f = \frac{\omega}{2 \cdot \pi} \qquad (6.10)$$

Die Periodendauer T dieser Schwingung ergibt sich durch den Kehrwert der Frequenz f zu

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2 \cdot \pi}{\omega} \qquad (6.11)$$

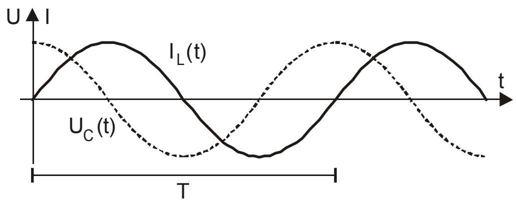
Für den Strom I(t) durch die Induktivität erhält man nach (6.8a)

$$I(t) = -\omega \cdot Q_0 \cdot \sin(\omega \cdot t) = -\omega \cdot U_0 \cdot C \cdot \sin(\omega \cdot t) \qquad (6.12)$$

Der Maximalwert dieses Stromes ergibt sich durch den Term $\omega \cdot Q_0$, wenn die Sinusfunktion den Wert 1 annimt. Zu diesem Zeitpunkt ist der Kondensator vollständig entladen und die ursprünglich in ihm gespeicherte Energie ist in der Induktivität gespeichert. Für sie gilt

$$E_L(t_1) = \frac{1}{2} \cdot L \cdot I(t_1)^2 = \frac{1}{2} \cdot L \cdot \omega^2 \cdot Q_0^2 \qquad (6.13)$$

Die Spannung ist nach (6.7a) gegenüber dem Strom um 90° phasenverschoben. Den zeitlichen Verlauf von Spannung und Strom zeigt die nebenstehende Abbildung. Wie man dem Graphen entnehmen kann, eilt die Spannung dem Strom um 90° voraus.



Beispielrechnung: $U_0 = 10$ V; $C = 50$ nF; $L = 15$ mH

Nach Glg. (6.1) beträgt die ursprünglich dem Schwingkreis zugeführte Energie

$$E_C(t_0) = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U_0^2 = \frac{1}{2} \cdot 50 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{F} \cdot (10\mathrm{V})^2 = 2{,}50 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{J}$$

Die Kreisfrequenz der entstehenden harmonischen Schwingung ergibt sich nach Glg. (6.9) zu

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{L \cdot C}} = \sqrt{\frac{1}{15 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{H} \cdot 50 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{F}}} = 3{,}65 \cdot 10^4 \,\frac{1}{\mathrm{s}}$$

entsprechend ergeben sich Schwingungsfrequenz f und Periodendauer T zu

$$f = \frac{\omega}{2 \cdot \pi} = \frac{3{,}65 \cdot 10^4}{2 \cdot \pi} \frac{1}{\mathrm{s}} = 5{,}81\,\mathrm{kHz} \qquad T = \frac{1}{f} = \frac{1}{5{,}81 \cdot 10^3}\,\mathrm{s} = 0{,}172\,\mathrm{ms}$$

Der maximale in der Spule auftretende Strom ergibt sich durch Auflösen von Glg. (6.2) nach I(t) zu

$$E_C(t_0) = E_L(t_1) \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot C \cdot U_0^2 = \frac{1}{2} \cdot L \cdot I(t_1)^2 \Rightarrow I(t_1) = U_0 \cdot \sqrt{\frac{C}{L}} = 10\mathrm{V} \cdot \sqrt{\frac{50 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{F}}{15 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{H}}} = 18{,}2\,\mathrm{mA}$$

oder nach Glg. (6.12) zu

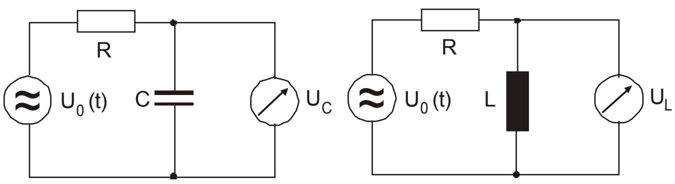
$$I(t_1) = \omega \cdot Q_0 = \omega \cdot U_0 \cdot C = 3{,}65 \cdot 10^4 \,\frac{1}{\mathrm{s}} \cdot 10\mathrm{V} \cdot 50 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{F} = 18{,}2\,\mathrm{mA}$$

Lsg. Ü-7

Versuchsziel: Bestimmung der Wechselstromwiderstände von Kondensator und Spule

Aufbau: siehe einleitender Text zur Aufgabenstellung

Skizze: siehe Abbildungen rechts



Durchführung: Die zu untersuchende Komponente wird in den Stromkreis eingesetzt. Bei Variation der Frequenz wird die Spannung U_C bzw. U_L in Abhängigkeit von der Frequenz gemessen, wobei die Amplitude der von der Spannungsquelle erzeugten sinusförmigen Wechselspannnung als konstant angesehen werden kann.

a) **Kondensator:**

Widerstand R und Kondensator C bilden eine Reihenschaltung. In dieser ist die Summe der Teilspannungen zu jedem Zeitpunkt gleich der Gesamtspannung, außerdem ist der Strom durch beide Elemente zu jedem Zeitpunkt gleich groß. Die Spannung am Kondensator ergibt sich durch

$$U_C(t) = \frac{1}{C} \cdot Q(t) \qquad (7.1)$$

Da der Strom sich aus der ersten Ableitung von Q(t) nach der Zeit t ergibt, gilt im Umkehrschluss, dass die sich die Ladung ergibt zu

$$Q(t) = \int I(t)dt \qquad (7.2)$$

Da die Spannungsquelle eine sinusförmige Wechselspannung erzeugt, gilt für den Strom

$$I(t) = \hat{I} \cdot \sin(\omega \cdot t) \qquad (7.3)$$

wobei sich $\hat{I}$ aus dem Gesamtwiderstand der Reihenschaltung ergibt. Eingesetzt in (7.2) erhält man

$$Q(t) = \int \hat{I} \cdot \sin(\omega \cdot t)dt = \hat{I} \cdot \int \sin(\omega \cdot t)dt = -\frac{\hat{I}}{\omega} \cdot \cos(\omega \cdot t) \qquad (7.4)$$

Aus (7.1) ergibt sich somit für die Spannung am Kondensator

$$U_C(t) = -\frac{\hat{I}}{\omega \cdot C} \cdot \cos(\omega \cdot t) = -\hat{U} \cdot \cos(\omega \cdot t) \qquad (7.5)$$

Der Wechselstromwiderstand X_C ergibt sich aus dem Quotienten der Beträge der Scheitelwerte von U und I zu

$$X_C = \frac{\hat{U}}{\hat{I}} = \frac{1}{\omega \cdot C} \qquad (7.6)$$

Der Widerstand R und die Impedanz X_C bilden einen Spannungsteiler, wobei die Spannung U_X an X_C abgegriffen wird. Für die zu messende Spannung gilt unter Berücksichtigung der Phasenbeziehungen (siehe b) demnach

$$U_X = U_0 \cdot \frac{X_C}{\sqrt{R^2 + X_C^2}} \qquad (7.7)$$

Für niedrige Frequenzen wird X_C sehr groß gegenüber R, damit nähert sich U_X asymptotisch der Spannung U_0. Für hohe Frequenzen dagegen wird X_C sehr klein gegenüber R und die Spannung U_X geht asymptotisch gegen Null.

Spule:

Auch hier wird wieder von einer Reihenschaltung wie beim Kondensator ausgegangen, allerdings gilt hier nun für die Spannung an der Spule

$$U_L(t) = L \cdot \dot{I}(t) \qquad (7.8)$$

Mit (7.3) erhält man somit

$$U_L(t) = L \cdot \frac{d}{dt}\left(\hat{I} \cdot \sin(\omega \cdot t)\right) = \omega \cdot L \cdot \hat{I} \cdot \cos(\omega \cdot t) = \hat{U} \cdot \cos(\omega \cdot t) \qquad (7.9)$$

Somit erhält man für den Wechselstromwiderstand der Spule aus dem Quotienten der Beträge der Scheitelwerte von U und I

$$X_L = \frac{\hat{U}}{\hat{I}} = \omega \cdot L \qquad (7.10)$$

Auch hier bildet X_L mit dem Widerstand R einen Spannungsteiler und es gilt:

$$U_X = U_0 \cdot \frac{X_L}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} \qquad (7.11)$$

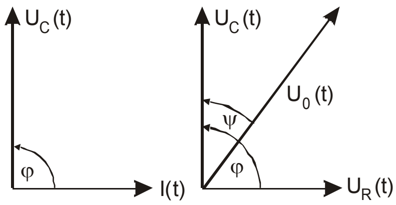
Analog zu den Überlegungen zu den Grenzwerten für Glg. (7.7) erhält man hier bei niedrigen Frequenzen einen sehr kleinen Wert für X_L und die Spannung geht asymptotisch gegen Null, bei hohen Frequenzen dagegen wird X_L sehr groß und die Spannung U_X geht asymptotisch gegen U_0.

b) Im Idealfall ist der Gleichstromwiderstand eines Kondensators unendlich und der Gleichstromwiderstand einer Spulle Null. Während der Gleichstromwiderstand jedoch unabhängig von der Frequenz f ist, ändert sich der Wechselstromwiderstand eines Kondensators oder einer Spule mit der Frequenz der angelegten Spannung. Strom und Spannung sind gegeneinander phasenverschoben, deshalb müssen zur Berechnung der Impedanz die Scheitelwerte der jeweiligen Größen verwendet werden.

Für den Kondensator erhält man für die Spannung $U_C(t)$ aus Glg. (7.5) unter Anwendung entsprechender trigonometrischer Beziehungen

$$U_C(t) = -\hat{U}\cdot\cos(\omega\cdot t) = \hat{U}\cdot\sin\left(\omega\cdot t - \frac{\pi}{2}\right) \qquad (7.12)$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit dem für den Strom nach Glg. (7.3), eilt der Strom der Spannung um die Phasendifferenz φ = 90° voraus. Der linke Teil der Skizze zeigt die entsprechenden vektoriellen Beziehungen zwischen $U_C(t)$ und $I(t)$.

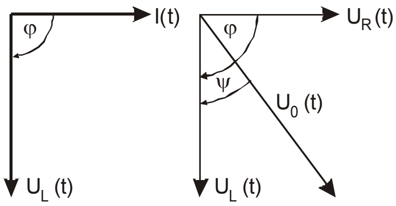


Der Strom $I(t)$ führt zu einer Spannung $U_R(t)$ am Widerstand R, die aber phasengleich zu $I(t)$ ist. Die Summe der beiden Spannungen muss wegen der Gesetzmäßigkeiten einer Reihenschaltung $U_0(t)$ ergeben. Da die beiden Spannungen aber unterschiedliche Richtungen haben, müssen sie vektoriell addiert werden. Der rechte Teil der Skizze zeigt die Phasenbeziehungen zwischen den drei Spannungen, darin bezeichnet ψ den gesuchten Phasenwinkel zwischen $U_C(t)$ und $U_0(t)$.

Analog erhält man für die Spule nach Glg. (7.9)

$$I(t) = \hat{I}\cdot\sin(\omega\cdot t) \qquad (7.13a)$$

$$U_L(t) = \hat{U}\cdot\cos(\omega\cdot t) = \hat{U}\cdot\sin\left(\omega\cdot t + \frac{\pi}{2}\right) \qquad (7.13b)$$



Hier sind die Verhältnisse genau umgekehrt wie beim Kondensator, der Strom eilt der Spannung um die Phasendifferenz φ = -90° hinterher. Ansonsten gelten die gleichen Überlegungen wie beim Kondensator (siehe nebenstehende Skizze).

In beiden Fällen ist die Phasendifferenz φ immer konstant, während der Phasenwinkel ψ von der Frequenz abhängt und Werte von 0° bis 90° bzw. 0° bis -90° annehmen kann. Aus trigonometrischen Überlegungen erhält man beim Kondensator für ψ die Beziehung

$$\tan(\psi_C) = \frac{U_R}{U_C} = \frac{\hat{I}\cdot R}{\frac{\hat{I}}{\omega\cdot C}} = R\cdot\omega\cdot C \qquad (7.14)$$

und bei der Spule.

$$\tan(\psi_L) = \frac{U_R}{U_L} = \frac{\hat{I}\cdot R}{\omega\cdot L\cdot\hat{I}} = \frac{R}{\omega\cdot L} \qquad (7.15)$$

Beispielrechnung: U_0 = 10 V; R = 5 kΩ; C = 50 nF; L = 15 mH; f = 1 kHz ... 10 kHz

Exemplarisch werden für f = 1 kHz die entsprechenden Größen berechnet, die übrigen Werte sind in der Tabelle aufgelistet.

$$X_C = \frac{1}{\omega\cdot C} = \frac{1}{2\cdot\pi\cdot 1000\,\text{Hz}\cdot 50\cdot 10^{-9}\,\text{F}} = 3183\,\Omega\;,\; U_C = U_0\cdot\frac{X_C}{\sqrt{R^2+X_C^2}} = 10\text{V}\cdot\frac{3183\,\Omega}{\sqrt{(5000\,\Omega)^2+(3183\,\Omega)^2}} = 5{,}37\,\text{V}$$

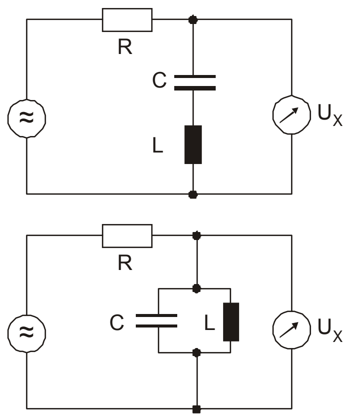
$$X_L = \omega\cdot L = 2\cdot\pi\cdot 1000\,\text{Hz}\cdot 15\cdot 10^{-3}\,\text{H} = 94\,\Omega\;,\quad U_L = U_0\cdot\frac{X_L}{\sqrt{R^2+X_L^2}} = 10\text{V}\cdot\frac{94\,\Omega}{\sqrt{(5000\,\Omega)^2+(94\,\Omega)^2}} = 0{,}19\,\text{V}$$

$$\tan(\psi_C) = R\cdot\omega\cdot C \quad\Rightarrow\quad \psi_C = \arctan(5000\,\Omega\cdot 2\cdot\pi\cdot 1000\,\text{Hz}\cdot 50\cdot 10^{-9}\,\text{F}) = 58°$$

$$\tan(\psi_L) = \frac{R}{\omega\cdot L} \quad\Rightarrow\quad \psi_L = \arctan\left(\frac{5000\,\Omega}{2\cdot\pi\cdot 1000\,\text{Hz}\cdot 15\cdot 10^{-3}\,\text{H}}\right) = 89°$$

f	1 000	2 000	3 000	4 000	5 000	6 000	7 000	8 000	9 000	10 000	Hz
X_C	3183	1592	1061	796	637	531	455	398	354	318	Ω
U_C	5,37	3,03	2,08	1,57	1,26	1,06	0,91	0,79	0,71	0,64	V
ψ_C	58	72	78	81	83	84	85	85	86	86	°
X_L	94	188	283	377	471	565	660	754	848	942	Ω
U_L	0,19	0,38	0,56	0,75	0,94	1,12	1,31	1,49	1,67	1,85	V
ψ_L	89	88	87	86	85	84	82	81	80	79	°

Lsg. Ü-8



Versuchsziel: Untersuchung der Resonanzeigenschaften von LC-Kombinationen

Aufbau: siehe einleitender Text zur Aufgabenstellung

Skizze: siehe Abbildungen rechts

Durchführung: Die zu untersuchende Kombination wird in den Stromkreis eingesetzt. Bei Variation der Frequenz f wird die Spannung U_X in Abhängigkeit von der Frequenz gemessen, wobei die Amplitude der von der Spannungsquelle erzeugten sinusförmigen Wechselspannnung als konstant angesehen werden kann.

a) Nach Glg. (7.6) gilt für den Wechselstromwiderstand eines Kondensators mit der Kapazität C die Beziehung

$$X_C = \frac{1}{\omega \cdot C} \tag{8.1}$$

und für eine Spule mit der Induktivität nach Glg. (7.10)

$$X_L = \omega \cdot L \tag{8.2}$$

In der Reihenschaltung dieser beiden Komponenten sind die Impedanzen zu addieren, dabei ist ihr vektorieller Charakter zu berücksichtigen. Das zugehörige Zeigerdiagramm für die Teilspannungen zeigt, dass die Spannung am Kondensator der Spannung an der Spule entgegengesetzt gerichtet ist. Damit ergibt sich die Gesamtimpedanz eines idealen LC-Reihenskreises ($R_S = 0\ \Omega$) zu

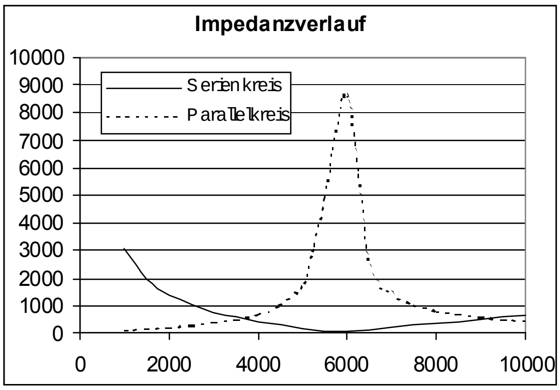
$$Z = \sqrt{(X_L - X_C)^2} = \sqrt{\left(\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C}\right)^2} \tag{8.3}$$

Bei sehr hohen Frequenzen überwiegt in der Klammer die Impedanz der Spule, während bei sehr niedrigen Frequenzen die Impedanz des Kondensators überwiegt. Damit wird auch Z entsprechend groß. Sind beide Impedanzen gleich groß, wird der Klammerausdruck gleich Null und die Impedanz geht gegen Null. Folglich sinkt der Spannungsverlauf für U_X mit zunehmender Frequenz bis auf Null ab und steigt anschließend wieder an.

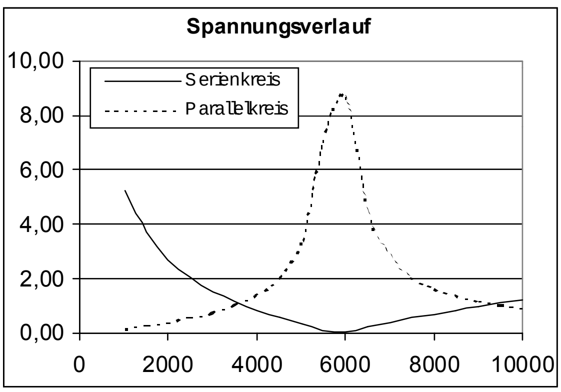
In der Parallelschaltung sind die Kehrwerte der Wechselstromwiderstände vektoriell zu addieren, die Impedanz ergibt sich zu für den idealen LC-Parallelkreis ($R_P = \infty$) zu

$$Z = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{\omega \cdot L} - \omega \cdot C\right)^2}} \tag{8.4}$$

Für die Impedanzen von Spule und Kondensator gelten bei den Grenzfällen die gleichen Aussagen wie oben, da diese nun aber im Nenner stehen, geht die Gesamtimpedanz in diesen beiden Grenzfällen gegen Null. Sind beide gleich groß, geht der Nenner gegen Null und Z somit gegen Unendlich. Damit verhält sich die Parallelschaltung genau umgekehrt wie die Reihenschaltung.



Einen beispielhaften Verlauf der Impedanz Z in Abhängigkeit von f mit den Bauteil-Werten von Ü-7 zeigt das obere Diagramm. Man erkennt deutlich., dass die beiden Extrema bei der gleichen Frequenz auftreten.



Der Spannungsverlauf ergibt sich nach Glg. (7.7) und ist in dem unteren Diagramm wiedergegeben. Da die für die Darstellung der Graphen zu Grunde liegende Tabelle nicht genau die Eigenfrequenz f_{res} des Parallelkreises trifft, wie sich nach Glg. (6.9) berechnen lässt, zeigt der Graph für den Parallelkreis keine Definitionslücke, wie sie nach Glg. (8.4) für $X_L = X_C$ zu erwarten wäre.

b) Die Thomsonsche Schwingungsformel für die Eigenfrequenz eines LC-Schwingkreises lautet

$$f_{res} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{L \cdot C}} \tag{8.5}$$

Die Lösung der Differentialgleichung in Ü-6 ergibt nach Glg. (6.9)

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{L \cdot C}} \qquad (8.6)$$

Mit $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$ ergibt sich

$$f = \frac{\omega}{2 \cdot \pi} \qquad (8.7)$$

und nach Einsetzen von (8.6) die Thomsonsche Schwingungsformel.

Bei einem LC-Parallelkreis ergibt sich für den Fall, dass $X_L = X_C$ ist, ein Maximum der Impedanz. Durch Einsetzen von (7.6) und (7.10) ergibt sich daraus

$$\frac{1}{\omega \cdot C} = \omega \cdot L \qquad (8.8)$$

Auflösen nach ω ergibt

$$\frac{1}{L \cdot C} = \omega^2 \qquad \Rightarrow \qquad \omega = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \qquad (8.9)$$

Diese Lösung stimmt mit der aus der DGL (8.6) überein und führt zur gleichen Eigenfrequenz f. Damit führen beide Wege zur Thomsonschen Schwingungsformel.

Beispielrechnung: $U_0 = 10$ V; $R = 5$ kΩ; $C = 50$ nF; $L = 15$ mH

Nach Glg. (8.6) erhält man

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} = \frac{1}{\sqrt{15 \cdot 10^{-3} H \cdot 50 \cdot 10^{-9} F}} = 3{,}65 \cdot 10^4 \frac{1}{s} \qquad \Rightarrow \qquad f = \frac{\omega}{2 \cdot \pi} = \frac{3{,}65 \cdot 10^4}{2 \cdot \pi} Hz = 5812\,Hz$$

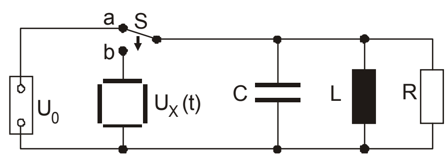
Bei einer Frequenz von 5812 Hz weisen also beide Resonanzkreise ein Extremum auf, was sowohl mit der graphischen Darstellung auf der vorherigen Seite als auch mit den Angaben der Tabelle zu Ü-7 übereinstimmt, der man entnehmen kann, dass hier dann die Impedanzen der beiden Komponenten mit 531 Ω bzw. 565 Ω etwa gleich groß sind.

Lsg. Ü-9

Versuchsziel: Untersuchung der Amplitudenabnahme bei gedämpften Schwingungen

Aufbau: siehe Ü-6

Skizze: siehe Abbildung rechts



Durchführung: siehe Ü-6

a) Solange der Schalter S in Position a steht, wird der Kondensator auf die Spannung U_0 aufgeladen. Sobald der Schalter in Position b gebracht wird, beginnt sich der Kondensator wie in Ü-6 beschrieben zu entladen. Hier allerdings fließt dabei nicht nur ein Strom durch die Spule, sondern auch durch den ohmschen Widerstand R. Der Spulenstrom bewirkt den Aufbau eines Magnetfeldes, in dem Energie gespeichert wird, die durch Selbstinduktion eine Spannung erzeugt, die den Kondensator wieder auflädt usw. Der Strom durch den Widerstand führt aber lediglich zu einer Erwärmung, die hierfür benötigte Energie geht damit dem Schwingkreis als elektrische Energie verloren. Folglich nimmt die Amplitude der Spannung am LC-Kreis mit jeder Periode der Schwingung ab.

Die Abnahme der Spannung während einer Periode der Schwingung lässt sich durch einen Faktor k beschreiben, es gilt:

$$U_X(t_{n+1}) = k \cdot U_X(t_n) \qquad \text{mit} \qquad k \in \left]0;\ 1\right] \qquad (9.1)$$

Für k = 1 erhält man eine konstante Amplitude, die Schwingung ist also ungedämpft, für k < 1 nimmt die Amplitude der Schwingung innerhalb einer Periode umso stärker ab, je kleiner k ist.

Mit $U_X(t_0 = 0) = U_0$ erhält man für die ersten Perioden

$$U_X(t_1) = k \cdot U_X(t_0) = k \cdot U_0; \qquad U_X(t_2) = k \cdot U_X(t_1) = k^2 \cdot U_0; \qquad U_X(t_3) = k \cdot U_X(t_2) = k^3 \cdot U_0 \quad \text{usw.}$$

Da k kleiner als Eins ist, nimmt die Amplitude exponentiell ab.

Die Amplitude nimmt in der Zeit T um den Faktor k ab. Anwendung der Gesetze für Exponentialfunktionen ergibt

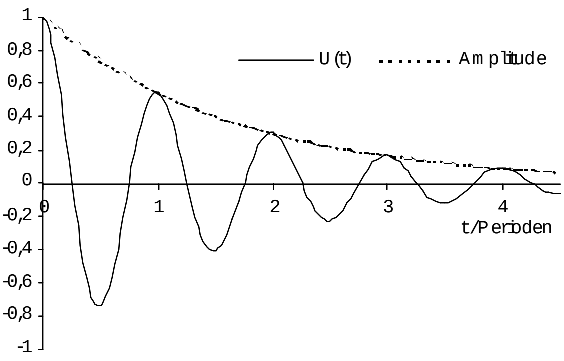
$$k = e^{-\delta T} \qquad (9.2)$$

Auflösen nach δ durch Logarithmieren ergibt

$$\ln(k) = -\delta \cdot T \Rightarrow \delta = -\frac{\ln(k)}{T} \qquad (9.3)$$

Tatsächlich nimmt die Energie aber kontinuierlich mit der Zeit t ab. Da die Spannung am Schwingkreis ebenfalls zeitabhängig ist, erhält man verallgemeinert

$$U_X(t) = e^{-\delta \cdot t} \cdot U(t) \qquad (9.4)$$



wobei U(t) dem zeitabhängigen Verlauf der Spannung des ungedämpften Schwingkreises entspricht. (Eine Lösung der entsprechenden DGL für den gedämpften Fall zeigt allerdings, dass sich mit der Dämpfung nicht nur der Amplitudenverlauf, sondern auch die Eigenfrequenz des Schwingkreises ändert.)

Die nebenstehende Abbildung zeigt den zeitlichen Verlauf der Schwingung eines gedämpften Schwingkreises für die ersten vier Perioden. Die gestrichelt eingezeichnete Hüllkurve für die jeweiligen Amplitudenmaxima lässt deutlich die exponentielle Abnahme erkennen.

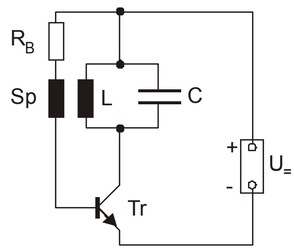
Für t = n · T erhält man somit wieder unter Berücksichtigung von Glg. (9.3)

$$U_X(t_n) = e^{-\delta \cdot n \cdot T} \cdot U(t_0) = e^{\frac{\ln(k)}{T} n \cdot T} \cdot U_0 = e^{\ln(k) \cdot n} \cdot U_0 = k^n \cdot U_0 \qquad (9.5)$$

Der Faktor δ im Exponenten wird als Dämpfungskonstante bezeichnet.

b) Wenn der Schwingkreis durch die Dämpfungsverluste Energie verliert, muss ihm durch geeignete Maßnahmen diese Energie immer wieder zugeführt werden. Dieses kann durch eine periodisch auftretende diskrete Energiezufuhr (vergleichbar mit dem Anstoßen einer Schaukel) oder durch eine kontinuierliche Zufuhr von Energie erfolgen. Entscheidend ist dabei, dass der Zeitpunkt der Energiezufuhr phasensynchron zur Schwingung erfolgt.

Eine geeignete Anordnung besteht darin, in das von der Spule erzeugte magnetische Feld eine Induktionsspule einzubringen und die in dieser erzeugte Induktionsspannung zu verwenden, um eine synchrone Energiezufuhr zu ermöglichen. In der nebenstehenden Schaltung verändert diese Induktionsspannung einen Basisstrom, der den Strom zwischen Kollektor und Emitter eines Transistors steuert. Bei geeigneter Polarität der Spannung, die durch die Anordnung der Spule im Verhältnis zur Spule des Schwingkreises beeinflusst werden kann, fließt so zum jeweils geeigneten Zeitpunkt ein zusätzlicher Strom durch die Spule des Schwingkreises, der die Abnahme des Stromes durch die Dämpfung gerade eben kompensiert. Somit entsteht eine ungedämpfte Schwingung. Eine solche Schaltung bezeichnet man als Oszillator. Der Basiswiderstand R_B wird dabei so eingestellt, dass die bei jeder Schwingung zugeführte Energie genau dem Energieverlust des Schwingkreises entspricht. In diesem Fall ergibt sich eine ungedämpfte harmonische Schwingung des Schwingkreises.



Beispielrechnung: C = 50 nF; L = 15 mH; δ = 0,1 · ω

Nach z.B. (8.9) ergibt sich für die Kreisfrequenz des Schwingkreises und somit für δ

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{L \cdot C}} = \sqrt{\frac{1}{15 \cdot 10^{-3} H \cdot 50 \cdot 10^{-9} F}} = 3{,}65 \cdot 10^4 \frac{1}{s} \qquad \Rightarrow \qquad \delta = 0{,}1 \cdot \omega = 3{,}65 \cdot 10^3 \frac{1}{s}$$

Eine Periode der Schwingung dauert somit

$$T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{L \cdot C} = 1{,}7210^{-4} s$$

Nach Glg. (9.4) hat nach einer Periode die Amplitude der Schwingung abgenommen auf

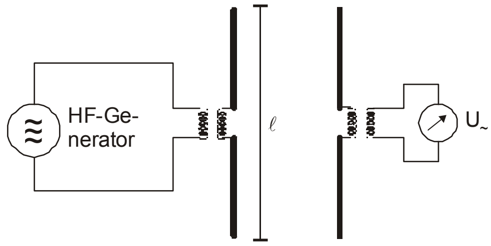
$$\hat{U}(t) = e^{-3{,}65 \cdot 10^3 \cdot 1{,}72 \cdot 10^{-4}} \cdot \hat{U}_0 = e^{-0{,}628} \cdot \hat{U}_0 = 0{,}534 \cdot \hat{U}_0$$

bei dieser Dämpfungskonstanten hat k also den Wert 0,534.

Lsg. Ü-10

Versuchsziel: Abstrahlung einer elektromagnetischen Welle durch einen Dipol

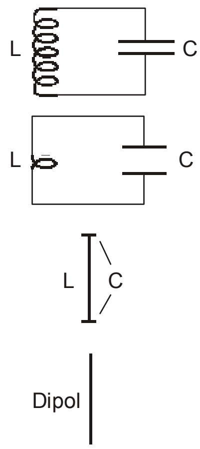
Aufbau: Zwei gleich lange, in Längsrichtung angeordnete Metallstäbe werden durch eine Spule verbunden. Eine zweite Spule überträgt durch magnetische Induktion die von einem in der Frequenz einstellbaren Hochfrequenzgenerator erzeugte Spannung auf den Dipol. Ein zweiter gleich langer Dipol wird parallel zum ersten Dipol angeordnet, die beiden inneren Enden werden induktiv mit einem geeigneten Messgerät (z.B. Oszilloskop) verbunden.



Skizze: siehe Abbildung rechts

Durchführung: Bei gegebener Länge ℓ der beiden Dipolpaare wird die Frequenz f des Hochfrequenz-Generators variiert und die Spannung am zweiten Dipol gemessen.

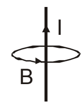
a) Ein LC-Kreis besteht aus einer Spule mit der Induktivität L und einem Kondensator mit der Kapazität C (oberstes Bild in der nebenstehenden Abbildung). Die diesem Schwingkreis zugeführte Energie wird kontinuierlich zwischen Spule und Kondensator ausgetauscht, wobei das von der Spule erzeugte magnetische Feld proportional zum Strom durch die Spule und das zwischen den Platten des Kondensators entstehende elektrische Feld proportional zur Spannung am Kondensator sind. Spannung und Strom sind dabei um 90° gegeneinander phasenverschoben.



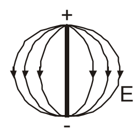
Die Induktivität L einer Spule hängt ab von der vom Leiter umschlossenen Fläche. Damit ist sie proportional zur Anzahl der Windungen und dem Durchmesser einer Windung. Die Kapazität dagegen ist proportional zur Plattenfläche und umgekehrt proportional zum Abstand der Platten. Reduziert man also die Anzahl der Windungen der Windungen, verkleinert die Plattenfläche des Kondensators und vergrößert ihren Abstand, so erhöht sich die Eigenfrequenz des Schwingkreises (zweites Bild von oben). Streckt man den Leiter ganz, so bildet der Leiter selbst die Induktivität L, wobei sich die beiden Kondensatorplatten nun bereits am Ende dieses Leiters befinden (drittes Bild von oben). Reduziert man die Plattenfläche auf den Durchmesser des Leiters, ergibt sich ein sog. Dipol (siehe unterstes Bild). Auch dieser verhält sich immer noch wie ein LC-Kreis, hat also eine definierte Eigenfrequenz.

Um diesem Schwingkreis Energie zuzuführen, kann eine induktive Ankoppelung verwendet werden. Dazu bringt man eine Leiterschleife in die Nähe der Mitte des Dipols oder fügt in der Mitte des Dipols eine Spule ein, in der durch eine zweite Spule ein entsprechender Induktionsstrom erzeugt werden kann (vergl. Abb. zum Aufbau).

Strom und Spannung sind um 90° phasenverschoben, d.h.: wenn der Strom durch die Mitte des Dipols ein Maximum aufweist, ist die Spannung zwischen seinen Enden gleich Null und umgekehrt.Da ein stromdurchflossener Leiter ein radiales Magnetfeld B erzeugt, das proportional zum Strom I ist, ergibt sich nebenstehendes Bild.



Hat dagegen die Spannung ein Maximum, ist der Strom gleich Null und die beiden Enden des Leiters tragen Ladungen mit unterschiedlichen Vorzeichen. Dadurch entsteht zwischen den beiden Enden des Dipols ein elektrisches Feld E, das proportional zur Spannung U zwischen den Leiterenden ist (siehe nebenstehende Abbildung).



Nach dem Induktionsgesetz gilt für einen im Magnetfeld mit v bewegten Leiter der Länge d

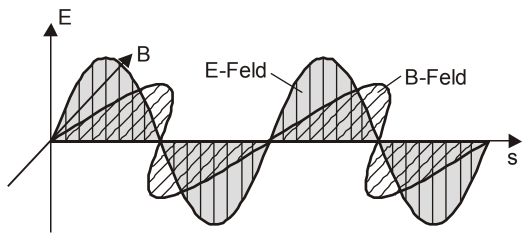
$$U = B \cdot d \cdot v \qquad (10.1)$$

für das elektrische Feld dagegen gilt die Beziehung

$$E = \frac{U}{d} \qquad (10.2)$$

Einsetzen von (10.1) in (10.2) ergibt

$$E = \frac{U}{d} = \frac{B \cdot d \cdot v}{d} = B \cdot v \qquad (10.3)$$



Ein sich im Raum ausbreitendes elektro-magnetisches Feld besteht aus einem zeitlich veränderlichen elektrischen Feld, das ein zeitlich veränderliches magnetisches Feld erzeugt und umgekehrt. Die Feldvektoren E und B stehen senkrecht zueinander und senkrecht zur Ausbreitungsrichtung der Welle.Das elektrische und das magnetische Feld sind also phasengleich.

b) Die Spannung zwischen den Dipolenden kommt durch eine Ladungsträgerverschiebung zustande. Befindet sich an einem Ende des Dipols die Ladung Q, so findet man am anderen Ende des Dipols die Ladung -Q. Eine Ladung Q erezugt aber ein elektrisches Feld E, das sich mit der Lichtgeschwindigkeit c ausbreitet. Da der Dipol die Länge ℓ hat, benötigt das Feld die Zeit t_ℓ, um die Ladung am anderen Ende zu erreichen. Es gilt:

$$t_\ell = \frac{\ell}{c} \qquad (10.4)$$

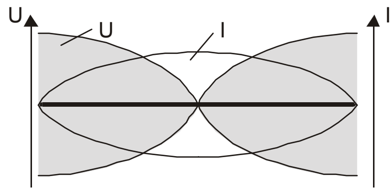
In dieser Zeit breitet sich das Feld auch im Raum aus (vergl. obige Abbildung) und legt dabei die Strecke s_ℓ zurück. Bei entsprechender Frequenz f_0 der Dipolschwingung erreicht das Feld das andere Ende des Dipols genau dann, wenn die sich ausbreitende Welle eine halbe Wellenlänge zurückgelegt hat und führt dazu, dass die durch das Feld ausgeübte Kraft auf diese Ladung genau mit dem Umkehrpunkt der Schwingung zusammenfällt. Mit

$$t_\ell = \frac{T}{2}, \qquad s_\ell = \frac{\lambda}{2} \qquad \text{und} \qquad f = \frac{1}{T} = \frac{c}{\lambda} \qquad (10.5)$$

erhält man unter Berücksichtigung von (10.4)

$$\ell = t_\ell \cdot c = \frac{T}{2} \cdot c = \frac{1}{2} \cdot \frac{\lambda}{c} \cdot c = \frac{\lambda}{2} \qquad (10.6)$$

Entspricht die Länge des Dipols also der halben Wellenlänge, entsteht auf dem Dipol eine stehende Welle, wobei sich für die Spannung an den Enden des Dipols zwei Schwingungsbäuche ausbilden, während der elektrische Strom dort zwei Schwingungsknoten aufweist (siehe Abbildung rechts). Wird der Dipol also mit der zugehörigen Frequenz



$$f_0 = \frac{c}{\lambda} = \frac{c}{2 \cdot \ell} \qquad (10.7)$$

angeregt, schwingt er mit seiner Resonanzfrequenz. In diesem Fall ist die Amplitude der Schwingung und damit auch die Amplitude der erzeugten elektro-magnetischen Welle maximal.

Die von diesem Dipol ausgesandte Welle erreicht den zweiten Dipol (vergl. Skizze bei der Einleitung zur Lösung) und übermittelt ihm Energie, die auch dort zum Entstehen einer Schwingung führt, die ebenfalls wegen Resonanz, die bei gleicher Dipollänge ℓ auftritt, zu einer maximalen Schwingungsamplitude führt. Diese führt zu einer messbaren Induktionsspannung an der Auskoppelspule, die mit dem Messgerät nachgewiesen werden kann und für $f = f_0$ ein ausgeprägtes Maximum aufweist. Ändert man die Länge ℓ des Empfangsdipols, tritt zwar immer noch ein Maximum der Spannung auf, weil der Sendedipol in Resonanz gerät, die am Empfangsdipol zu messende Spannung ist nun aber kleiner, weil dieser Dipol nicht mehr in Resonanz gerät.

Beispielrechnung: Dipollänge für eine UKW-Empfangsantenne für f = 96 MHz

Löst man (10.7) nach ℓ auf, erhält man

$$f_0 = \frac{c}{2 \cdot \ell} \Rightarrow \ell = \frac{c}{2 \cdot f_0} = \frac{2{,}998 \cdot 10^8 \,\frac{m}{s}}{2 \cdot 96 \cdot 10^6\,\text{Hz}} = 1{,}56\,\text{m}$$

Zur induktiven Ein- bzw. Auskoppelung der Spannung wird der Dipol in der Regel in der Mitte geteilt, somit hat jeder Teilstab des Dipols eine Länge von 78 cm.

(Platziert man einen Teilstab eines solchen Dipols isoliert senkrecht auf eine Metallplatte, wird der zweite Teilstab durch Reflektion der Wellen an der Metalloberfläche virtuell gespiegelt, dies nutzt man z.B. bei Autoantennen aus.)