

Schwingungen und Wellen

ein unterrichtsbegleitendes Scriptum

Inhaltsverzeichnis

1.	Schwingungen	1
1.1	Beispiele	1
1.2	Gemeinsamkeiten	1
1.3	Physikalische Grundlagen	1
1.3.1	Energiebilanz	1
1.3.2	Energieumwandlung	4
1.3.3	Beschleunigung	4
1.4	Mathematische Behandlung	4
1.4.1	Betrachtung ausgewählter Bahnpunkte	5
1.4.2	Während der Bewegung wirkende Kräfte	6
1.4.3	Verallgemeinerung der Bewegungsgleichungen	6
1.4.4	Bestimmen der Bewegungsgleichung	6
1.4.4.1	Exponentialfunktionen	7
1.4.4.2	Trigonometrische Funktionen	7
1.4.5	Lösen der Differenzialgleichung	7
1.4.5.1	Trigonometrischer Ansatz	7
1.4.5.2	Ansatz über Exponentialfunktion	9
1.6	Anwendungsbeispiele zu Schwingungen	10
1.6.1	Fadenpendel	10
1.6.2	U-Rohr-Schwingung	12
1.6.3	Feder-Masse-Pendel	13
1.7	Graphische Darstellung des Bewegungsablaufes	15
1.8	Energiebilanz während der Schwingung	15
1.9	Gedämpfte Schwingungen	16
1.10	Erzwungene Schwingungen	16
1.11	Elektrischer Schwingkreis	17
2	Wellen	19
2.1	Gekoppelte Feder-Masse-Pendel als mechanische Oszillatorkette	19
2.2	Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Welle	20
2.2	Beispiele für Oszillatorketten	20
2.2.1	Wellen auf einer Wasseroberfläche	20
2.2.2	Schallwellen in Luft	20
2.2.3	Schallwellen in Festkörpern	21
2.3	Wellenausbreitung bei periodischer Anregung	21
2.3.1	Wellenlänge	21
2.3.2	Wellengleichung in Abhängigkeit von der Zeit	21
2.3.3	Wellengleichung in Abhängigkeit vom Ort	22
2.3.4	Allgemeine Wellengleichung	22
2.4	Ausbreitung von Wellen	22
2.4.1	Punktformige Anregung	22
2.4.2	Überlagerung von Wellen	23
2.4.3	Huygens'sches Prinzip	23
2.5	Elektromagnetische Wellen	24
2.5.1	Felder einer bewegten Ladung	24
2.5.2	Feld einer schwingenden Ladung	24
2.5.3	Licht als elektromagnetische Welle	25
2.6	Beugung und Interferenz	25
2.6.1	Beugung und Interferenz am Doppelspalt	25
2.6.2	Beugung und Interferenz am Gitter	27
2.7	Anwendungsbeispiele zu Wellen	28
2.7.1	Schallwellen	28
2.7.2	DCF-Zeitzeichensignal	29
2.7.3	Gitterspektrograph	30
	Index	31

1. Schwingungen

Bislang wurden in der Kinematik lediglich Vorgänge behandelt, bei denen ein Körper ruht, sich mit konstanter Geschwindigkeit gleichförmig bewegt oder mit einer konstanten Beschleunigung seine Geschwindigkeit ändert. Bei allen anderen Bewegungsabläufen ist die Beschleunigung nicht konstant, sondern ändert sich in Abhängigkeit von der Zeit.

Eine besondere Gruppe von Bewegungen mit nicht konstanter Beschleunigung sind die, bei denen sich ein und derselbe Bewegungsablauf periodisch wiederholt.

1.1 Beispiele

Man bezeichnet einen Ablauf als periodisch, wenn sich ein bestimmter Ablauf nach einer bestimmten Zeit auf die gleiche Weise wiederholt, die dafür benötigte Zeit T nennt man Periodendauer. Dazu gehören z.B.

- die Bewegung eines Uhrenpendels (Abb. 1a)
- die Bewegung einer zwischen zwei Federn aufgehängten Masse (Abb. 1b)
- die Bewegung einer Flüssigkeitssäule in einem U-Rohr (Abb. 1c)

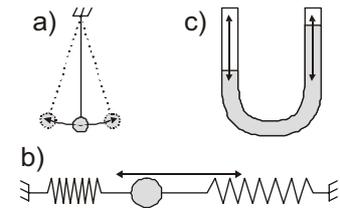


Abb. 1: Schwingungsfähige Systeme

1.2 Gemeinsamkeiten

Alle drei Beispiele haben zunächst folgende Punkte gemeinsam:

- es gibt eine Masse, deren Geschwindigkeit sich fortlaufend ändert
- es gibt zwei Zeitpunkte, wo die Geschwindigkeit der Masse Null ist
- es gibt zwei Zeitpunkte, wo der Betrag der Geschwindigkeit der Masse ein Maximum aufweist

Betrachtet man den Ort der Masse in Abhängigkeit von der Zeit, so ergeben sich weitere Gemeinsamkeiten:

- der Ort, an dem die Geschwindigkeit ein Maximum aufweist, ist immer der gleiche
- es gibt zwei Orte, an denen der Betrag der Geschwindigkeit Null ist

1.3 Physikalische Grundlagen

Da sich die Geschwindigkeit in Abhängigkeit von der Zeit dauernd ändert, muss es nach der Grundgleichung der Mechanik

$$F = m \cdot a \quad (1)$$

eine Kraft geben, die auf die Masse eine Beschleunigung ausübt. Da die Geschwindigkeit mit der Zeit sowohl zu- als auch abnimmt, ist diese Beschleunigung nicht konstant, es gilt also

$$a = a(t) \quad (2)$$

es liegt also eine von der Zeit abhängige Beschleunigung vor.

1.3.1 Energiebilanz

Sieht man von der unvermeidlichen Reibung ab, so stellt jedes dieser drei Beispiele ein abgeschlossenes System dar. Nach dem Energieerhaltungssatz ist aber die Summe aller Energien in einem abgeschlossenen System konstant. Da sich die Geschwindigkeit fortwährend ändert, ändert sich auch die kinetische Energie E_{kin} der Masse. Folglich muss es eine zweite Energieform geben, damit der Energieerhaltungssatz erfüllt ist. Die kinetische Energie muss in diese zweite Energieform überführt werden, außerdem muss es möglich sein, aus dieser Energie die ursprüngliche kinetische Energie wieder zurückzugewinnen.

Betrachtet man das Uhrenpendel oder die Flüssigkeitssäule, so stellt man fest:

- hat der Betrag der Geschwindigkeit ein Maximum, so befindet sich die Masse in ihrer tiefsten Lage
- ist die Geschwindigkeit Null, so befindet sich die Masse an einem von zwei höchsten Punkten

Da diese Schwingung im Schwerfeld der Erde abläuft, kann man diesen beiden Positionen jeweils eine potenzielle Energie zuordnen, die zweite benötigte Energieform wäre hier also die potenzielle Energie E_{pot} im Schwerfeld der Erde.

Entsprechend findet man für die Masse zwischen den Federn:

- hat der Betrag der Geschwindigkeit ein Maximum, so sind die Federn weder gedehnt noch gestaucht
- ist die Geschwindigkeit Null, so ist eine Feder maximal gestaucht und die andere maximal gedehnt

Hier ergibt sich die zweite Energieform durch die elastische Verformung der beiden Federn, die ebenfalls als potenzielle Energie E_{pot} auftritt.

1.3.2 Energieumwandlung

Ein wesentliches Kriterium für eine (mechanische) Schwingung ist also die fortwährende Umwandlung von kinetischer Energie in potenzielle Energie und umgekehrt. Da die Gesamtenergie zu jedem Zeitpunkt konstant ist, gilt also

$$E_{\text{pot}}(t) + E_{\text{kin}}(t) = E_{\text{ges}} = \text{const} \quad (3)$$

wobei E_{pot} als auch E_{kin} von der Zeit abhängig sind und sich ständig verändern. Da sich die Geschwindigkeit mit der Zeit verändert, gilt für die kinetische Energie

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m \cdot v(t)^2 \quad (4)$$

entsprechend gilt für die potenzielle Energie

$$E_{\text{pot}} = m \cdot g \cdot s_w(t) \quad (5)$$

wobei der Index w angibt, dass hier nicht der Ort der Masse an sich, sondern die wirksame Strecke anzugeben ist, die zu einer Änderung der potenziellen Energie führt. Für die Flüssigkeitssäule sind die Überlegungen etwas schwieriger, führen aber zu äquivalenten Aussagen.

1.3.3 Beschleunigung

Keine der beschriebenen Massen führt einen freien Fall aus, die zur ständigen Änderung der Geschwindigkeit führende Kraft hat also eine andere Ursache. Am einfachsten kann man das an der Masse zwischen den beiden Federn erkennen: wird eine Feder gedehnt, so ist eine Kraft notwendig, die umso größer wird, desto größer die Dehnung ist. Nach dem Hookschen Gesetz gilt

$$F(s) = D \cdot s \quad (6)$$

wobei D die Federkonstante und s die Dehnung der Feder aus der Ruhelage angibt. Für die Stauchung gilt das gleiche Gesetz mit umgedrehtem Vorzeichen (s wird dann als negativ angenommen, was zu einer entgegengesetzten Kraft führt). Da die Feder das Bestreben hat, wieder in ihre Ausgangslage zurückzukehren, übt sie eine Kraft auf die Masse m aus. Nach (1) erhält man so für die Beschleunigung

$$a(s) = \frac{F(s)}{m} = \frac{D}{m} \cdot s \quad (7)$$

Entsprechendes gilt prinzipiell auch für das Uhrenpendel und die Flüssigkeitssäule, hier sind die Überlegungen etwas komplizierter und werden an späterer Stelle erörtert.

1.4 Mathematische Behandlung

Für die Darstellung der prinzipiellen Vorgehensweise wird im Folgenden zunächst die Schwingung eines Feder-Masse-Systems verwendet. Zur Vereinfachung wird dabei von lediglich einer Feder ausgegangen, deren eines Ende fest eingespannt und an deren anderen Ende eine Masse befestigt ist. Der Einfluss des Schwerfeldes des Laborsystems wird vernachlässigt (das System befindet sich im schwerelosen Raum). Die Anordnung ist in Abb. 2 dargestellt. Die Masse kann sich in Richtung der s -Achse bewegen und befindet sich bei 0 in ihrer Ruhelage.

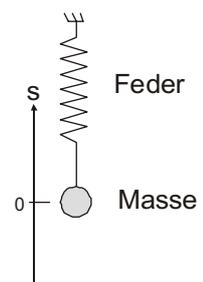


Abb. 2: Feder-Masse-System

1.4.1 Betrachtung ausgewählter Bahnpunkte

Zunächst wird die Masse durch Einwirken einer äußeren Kraft F_0 um die Strecke s_0 aus ihrer Ruhelage ausgelenkt, dabei wird dem System Energie zugeführt, die in der Feder gespeichert wird. Mit der Federkonstanten D gilt für die Kraft

$$F = D \cdot s \quad (8)$$

Da die aufzuwendende Kraft mit zurückgelegter Strecke s zunimmt, muss die aufzuwendende Arbeit über das Integral bestimmt werden:

$$W = \int_0^{s_0} F(s) ds \quad (9)$$

Durch Einsetzen von Gleichung (8) in (9) und Lösen des bestimmten Integrals erhält man

$$W = \int_0^{s_0} (D \cdot s) ds = D \cdot \int_0^{s_0} s ds = D \cdot \left[\frac{1}{2} s^2 \right]_0^{s_0}$$

$$W = \frac{1}{2} D \cdot s_0^2 \quad (10)$$

Diese Arbeit wird als potenzielle Energie in der Feder gespeichert. Da sich die Masse noch nicht bewegt, solange man die Feder festhält, ist dies gleichzeitig die Gesamtenergie des Systems:

$$E_{\text{ges}} = \frac{1}{2} D \cdot s_0^2 \quad (11)$$

Zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ wird nun die Feder losgelassen. Da die Feder zu diesem Zeitpunkt noch gespannt ist, übt sie nun eine Kraft auf die Masse aus. Nach Glg. (1) führt diese Kraft zu einer Beschleunigung der Masse m . Zum Zeitpunkt t_0 ergibt sich für daraus die Anfangsbeschleunigung a_0 zu

$$a_0 = \frac{F_0}{m} = \frac{D}{m} \cdot s_0$$

Durch die Beschleunigung nimmt die Geschwindigkeit der Masse zu, außerdem verändert sie ihren Ort, da sich die Feder entspannt. Zu einem späteren Zeitpunkt ist die Feder also weniger stark gespannt und die Kraft, mit der die Masse beschleunigt wird, nimmt ab.

Hat die Masse zum Zeitpunkt t_1 ihre Ruhelage erreicht, ist die Feder vollständig entspannt und übt somit keine beschleunigende Kraft mehr auf die Masse aus. Die in dem Zeitintervall $[t_0; t_1]$ wirkende Kraft hat dabei die Masse auf eine bestimmte Geschwindigkeit beschleunigt, die nun als kinetische Energie in der Masse gespeichert ist, dabei ist die gesamte potenzielle Energie der Feder in kinetische Energie umgewandelt worden. Es gilt also unter Berücksichtigung von Glg. (11)

$$E_{\text{kin}} = E_{\text{ges}}$$

und man erhält für die Geschwindigkeit v_1 , mit der die Masse die Ruhelage passiert:

$$\frac{1}{2} m \cdot v_1^2 = \frac{1}{2} D \cdot s_0^2 \Rightarrow v_1 = s_0 \cdot \sqrt{\frac{D}{m}} \quad (13)$$

Anschließend wird nun durch die Trägheit der Masse die Bewegung fortgesetzt. Dabei wird nun die Feder gedehnt und es tritt wieder eine Kraft auf, die nun aber die Masse abbremst (negativ beschleunigt). Dabei wird die Feder solange gedehnt, bis zu einem Zeitpunkt t_2 die kinetische Energie wieder vollständig in potenzielle Energie umgewandelt worden ist. Die Feder ist nun um die Strecke s_0 in entgegengesetzter Richtung gedehnt worden, also ist $s_2 = -s_0$.

Bislang konnten nur Aussagen über drei besondere Bahnpunkte gemacht werden, bei denen jeweils genau eine Energieform auftrat. Im Anfangszustand lässt sich eine Aussage über die potenzielle Energie des Systems treffen, beim Passieren der Ruhelage (Nulldurchgang) über die kinetische Energie, da die jeweils andere Energieform zu diesen beiden besonderen

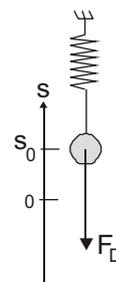


Abb. 3: Gespannte Feder

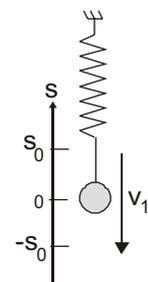


Abb. 4: Nulldurchgang

Zeitpunkten Null ist. Da sich die Beschleunigung jedoch ständig ändert, ist für eine vollständige Darstellung der Bewegungsgleichung ein anderer Ansatz als über den Energieerhaltungssatz notwendig.

1.4.2 Während der Bewegung wirkende Kräfte

Die Masse ist fest mit dem Ende der Feder verbunden, d.h., dass die Summe der Kräfte zwischen Feder und Masse zu jedem Zeitpunkt Null ergeben müssen:

$$F_D(t) + F_m(t) = 0 \quad (14)$$

dabei ist F_D die von der Feder auf die Masse ausgeübte Kraft und F_m die Trägheitskraft der Masse (\rightarrow Trägheitsgesetz). F_D ändert sich in Abhängigkeit vom Ort und damit auch in Abhängigkeit von der Zeit:

$$F_D(t) = D \cdot s(t) \quad (15)$$

Nach Glg. (1) ist die Trägheitskraft von der ebenfalls zeitabhängigen Beschleunigung abhängig, es gilt:

$$F_m(t) = m \cdot a(t) \quad (16)$$

Setzt man diese beiden Beziehungen in Glg. (14) ein, so erhält man also

$$D \cdot s(t) + m \cdot a(t) = 0 \quad (17)$$

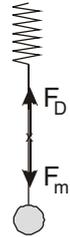


Abb. 5: Kräftegleichgewicht

1.4.3 Verallgemeinerung der Bewegungsgleichungen

Ändert sich der Ort eines Objektes in Abhängigkeit von der Zeit, so wird seine Bewegung durch die Funktion $s(t)$ beschrieben. Nach der Definition für die Geschwindigkeit gilt

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

wobei lediglich eine mittlere Geschwindigkeit angegeben werden kann, da das Objekt in der Zeit Δt das Wegintervall Δs zurückgelegt hat. Um die Momentangeschwindigkeit zu erhalten, müssen die Intervalle beliebig klein gewählt werden und man erhält

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

Damit erhält man die Momentangeschwindigkeit zu einem bestimmten Zeitpunkt t durch Ableitung von $s(t)$ nach der Zeit

$$v(t) = \frac{d}{dt} s(t) = \dot{s}(t) \quad (18)$$

Analog erhält man für die Beschleunigung als Veränderung der Geschwindigkeit

$$a(t) = \frac{d}{dt} v(t) = \dot{v}(t) \quad (19)$$

also ist die Beschleunigung die Ableitung der Geschwindigkeit nach der Zeit. Einsetzen von (19) in (18) ergibt somit

$$a(t) = \ddot{s}(t) \quad (20)$$

Kennt man also den funktionalen Zusammenhang zwischen dem Ort s und der Zeit t , so lassen sich Geschwindigkeit und Beschleunigung zu jedem beliebigen Zeitpunkt t dadurch bestimmen, dass man die erste oder zweite Ableitung von $s(t)$ bildet.

1.4.4 Bestimmen der Bewegungsgleichung

In Glg. (17) findet man eine Gleichung, die sowohl $s(t)$ als auch $a(t)$ enthält. Wendet man Glg. (20) darauf an, erhält man

$$D \cdot s(t) + m \cdot \ddot{s}(t) = 0 \quad (21)$$

Diese Gleichung enthält sowohl die Ausgangsfunktion $s(t)$ als auch ihre 2. Ableitung $\ddot{s}(t)$. Eine solche Gleichung bezeichnet man als *Differenzialgleichung*. Da neben der Ausgangsfunktion nur noch die 2. Ableitung auftritt, wird sie als

Differenzialgleichung 2. Ordnung bezeichnet (würde z.B. neben der Ausgangsfunktion nur die 1. Ableitung auftreten, wäre es eine Differenzialgleichung 1. Ordnung). Da kein konstanter Term vorhanden ist, sondern die rechte Seite der Gleichung Null ist, wird diese Gleichung als *homogene Differenzialgleichung (2. Ordnung)* bezeichnet.

Einen Lösungsansatz zur Lösung einer solchen Differenzialgleichung erhält man, wenn man die Gleichung nach $s(t)$ auflöst:

$$s(t) = -\frac{m}{D} \cdot \ddot{s}(t) \quad (22)$$

Unter Verwendung mathematischer Bezeichnungen entspricht das dem Ausdruck

$$f(x) = c \cdot f''(x)$$

Gesucht ist also eine Funktion, deren 2. Ableitung bis auf einen konstanten Faktor c mit der Ausgangsfunktion übereinstimmt. Betrachtet man die verschiedenen Funktionsklassen so scheiden z.B. alle polynomischen Funktionen aus, da sich hier bei der Ableitung der Grad des Polynoms ändert. Unter den verbleibenden Funktionsklassen bieten sich die Exponentialfunktionen und die trigonometrischen Funktionen für eine nähere Analyse an.

1.4.4.1 Exponentialfunktionen

Tritt in einer Exponentialfunktion die Variable lediglich in 1. Potenz im Exponenten auf, ändert sich bei der Ableitung nicht der Grad der Funktion, denn es gilt

$$f(x) = e^{k \cdot x} \xrightarrow{\text{Ableitung}} f'(x) = k \cdot e^{k \cdot x}$$

Bildet man die 2. Ableitung, so erhält man

$$f'(x) = k \cdot e^{k \cdot x} \xrightarrow{\text{Ableitung}} f''(x) = k^2 \cdot e^{k \cdot x} = k^2 \cdot f(x)$$

Hiermit hätte man eine Funktion gefunden, die die oben angegebene Bedingung erfüllt, denn es gilt

$$f(x) = k^2 \cdot f(x)$$

Zur Lösung von Gleichung (22) kommen also Exponentialfunktionen mit linearen Exponenten in Frage.

1.4.4.2 Trigonometrische Funktionen

Da sich die vier trigonometrischen Grundfunktionen durch die Additionstheoreme auf eine Funktion zurückführen lassen, genügt die Untersuchung z.B. der Funktion $f(x) = \cos(k \cdot x)$ und ihrer Ableitungen. Es gilt

$$f(x) = \cos(k \cdot x) \xrightarrow{\text{Ableitung}} f'(x) = -k \cdot \sin(k \cdot x)$$

$$f'(x) = -k \cdot \sin(k \cdot x) \xrightarrow{\text{Ableitung}} f''(x) = -k^2 \cdot \cos(k \cdot x) = -k^2 \cdot f(x)$$

Hier findet man für die 2. Ableitung den gesuchten Zusammenhang

$$f(x) = -k^2 \cdot f(x)$$

(man beachte im Vergleich zu den Exponentialfunktionen das hier auftretende Minuszeichen!). Auch diese Funktion ist also als Lösungsansatz geeignet.

1.4.5 Lösen der Differenzialgleichung

Unter dem Lösen einer Differenzialgleichung versteht man die Auswahl einer geeigneten Funktion und die Bestimmung der einzelnen Koeffizienten, um die gesuchte Ausgangsfunktion vollständig angeben zu können.

Die in 1.4.4 vorgestellten Lösungsansätze sind prinzipiell gleichwertig, zunächst soll hier jedoch der trigonometrische verwendet werden, da sich dieser am leichtesten nachvollziehen lässt.

1.4.5.1 Trigonometrischer Ansatz

Für die gesuchte Funktion $s(t)$ setzt man den allgemeinsten Term für eine Cosinusfunktion an:

$$s(t) = k_1 \cdot \cos(k_2 \cdot t) \quad (23) \quad \textbf{(Lösungsansatz)}$$

wobei k_1 und k_2 Parameter sind, die im Weiteren näher zu bestimmen sind.

Als nächstes bestimmt man die 2. Ableitung und erhält

$$\ddot{s}(t) = -k_1^2 \cdot \cos(k_2 \cdot t) = -k_1^2 \cdot s(t) \quad (24)$$

Nun setzt man (24) in (22) ein und erhält

$$s(t) = -\frac{m}{D} \cdot (-k_2^2 \cdot s(t)) \quad (22a)$$

Ausmultiplizieren der rechten Seite, Division durch $s(t)$ und durch k_2^2 sowie anschließendes Wurzelziehen liefert

$$\frac{1}{k_2} = \sqrt{\frac{m}{D}} \Rightarrow k_2 = \sqrt{\frac{D}{m}} \quad (25)$$

Damit ist bereits ein Parameter der Gleichung bestimmt. Um den zweiten Parameter zu erhalten, muss der Zustand des Systems zu einem beliebigen Zeitpunkt bekannt sein. In unserem Fall ist bekannt, dass zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ die Masse um die Strecke s_0 ausgelenkt ist, also gilt

$$s(t_0) = s_0 \quad (26) \quad \textbf{(Randbedingung)}$$

Setzt man (25) und (26) in (23) ein, so erhält man

$$s_0 = k_1 \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{D}{m}} \cdot 0\right) \Rightarrow k_1 = s_0 \quad (27)$$

da der Cosinus von Null gleich Eins ist. Damit kennt man alle Parameter des Lösungsansatzes und kann die Bewegungsgleichung angeben, es gilt:

$$s(t) = s_0 \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{D}{m}} \cdot t\right) \quad (28) \quad \textbf{(Bewegungsgleichung)}$$

Die Cosinusfunktion ist periodisch mit der Periode 2π . Um die Periodendauer T zu bestimmen, muss also gelten:

$$\sqrt{\frac{D}{m}} \cdot T = 2\pi \quad (29)$$

Auflösen nach T ergibt für die Periodendauer

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{D}} \quad (30) \quad \textbf{(Periodendauer)}$$

Als Frequenz bezeichnet man die Anzahl der Schwingungen pro Sekunde. Sie ergibt sich aus der Periodendauer T zu

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{D}{m}} \quad (31) \quad \textbf{(Frequenz)}$$

und wird in Hz (Hertz) gemessen.

Der in Glg. (28) auftretende Wurzelquotient wird auch als Kreisfrequenz bezeichnet, da er angibt, wie oft pro Sekunde eine vollständige Periode von 2π durchlaufen wird. Man definiert

$$\omega := \sqrt{\frac{D}{m}} \quad (32) \quad \textbf{(Kreisfrequenz)}$$

Zwischen der Frequenz f und der Kreisfrequenz ω besteht folglich die Beziehung

$$\omega = 2\pi \cdot f$$

Im mks-System haben f und ω die gleiche Einheit s^{-1} , doch während die Frequenz mit der Einheit Hz angegeben wird, gibt man die Kreisfrequenz mit der Einheit s^{-1} an.

Zusammengefasst die Ergebnisse für das Feder-Masse-System:

Schwingungsgleichung	Periodendauer	Frequenz	Gesamtenergie
$s(t) = s_0 \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{D}{m}} \cdot t\right)$	$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{D}}$	$f = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{D}{m}}$	$E_{\text{ges}} = \frac{1}{2} D \cdot s_0^2$

1.4.5.2 Ansatz über Exponentialfunktion

Analog zur Vorgehensweise in 1.4.5.1 erhält man hier als Ansatzgleichung

$$s(t) = k_1 \cdot e^{k_2 \cdot t} \quad (23e)$$

mit der 2. Ableitung

$$\ddot{s}(t) = k_1 \cdot k_2^2 \cdot e^{k_2 \cdot t} = k_2^2 \cdot s(t) \quad (24e)$$

Einsetzen dieses Ausdrucks in die Differenzialgleichung ergibt hier für den Parameter k_2

$$k_2 = \sqrt{-\frac{D}{m}} \quad (25e)$$

Da m und D beides Größen sind, die nicht negativ sein können, ergibt sich hier das Problem, die Wurzel aus einer negativen Zahl ziehen zu müssen, was in der Menge der reellen Zahlen nicht geht. Eine Erweiterung der reellen Zahlen sind die sogenannten imaginären Zahlen, wobei man definiert:

$$i = \sqrt{-1}$$

Damit kann man unter Anwendung der Regeln für Wurzeln (25e) darstellen als

$$k_2 = i \cdot \sqrt{\frac{D}{m}}$$

setzt man diesen Ausdruck in $s(t)$ ein, so ergibt sich als Zwischenergebnis

$$s(t) = k_1 \cdot e^{i \cdot \sqrt{\frac{D}{m}} \cdot t}$$

Mit der Definition für die Kreisfrequenz nach Glg. (32) erhält der Ausdruck die Form

$$s(t) = k_1 \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t}$$

Einsetzen der Randbedingung $s(t_0 = 0) = s_0$ ergibt auch hier für den Parameter k_1

$$s(t_0) = k_1 \cdot e^{i \cdot \omega \cdot 0} \Rightarrow s_0 = k_1 \quad (27e)$$

Somit lautet die vollständige Bewegungsgleichung

$$s(t) = s_0 \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t} \quad (28e)$$

Auf den ersten Blick scheint dies eine völlig andere Lösung zu sein als die, die man auf trigonometrischem Wege findet. Ein vertieftes Verständnis komplexer Zahlen zeigt jedoch, dass diese Lösung sich aus zwei Anteilen zusammensetzt, von denen der eine rein imaginär und der andere rein reell ist. Betrachtet man eine komplexe Zahl zusammengesetzt aus zwei Komponenten eines ebenen orthogonalen Koordinatensystems, so findet man alle komplexen Zahlen mit gleichem Betrag auf einem Kreis (siehe Abb. 6). Lässt man in diesem Kreis einen Vektor rotieren, so wechselt die reelle Komponente periodisch zwischen zwei Beträgen. Man sieht, dass die reelle Komponente durch das Produkt des Betrages und dem Kosinus des zwischen reeller Achse und Vektor eingeschlossenen Winkels bestimmt wird, was mit der trigonometrischen Lösung übereinstimmt.

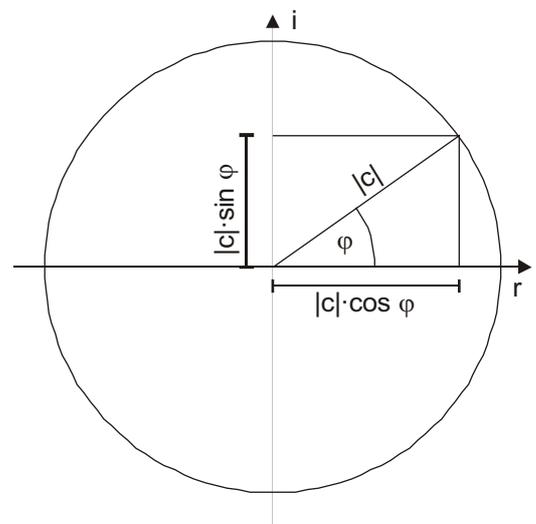


Abb. 6: Zahlen in der komplexen Zahlenebene

1.6 Anwendungsbeispiele zu Schwingungen

Im Folgenden sollen für die drei in 1.1 angegebenen Beispiele die notwendigen Überlegungen dargestellt und die entsprechenden Vorgehensweisen mit konkreten Zahlenwerten angewendet werden.

1.6.1 Fadenpendel

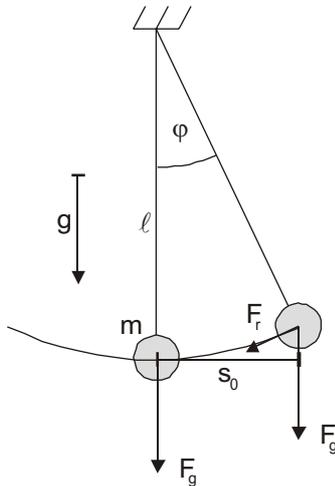


Abb. 7: Fadenpendel

Eine Masse $m = 1 \text{ kg}$ wird an einem als masselos anzusehenden Faden der Länge $\ell = 1 \text{ m}$ im Laborsystem ($g = 9,81 \text{ m/s}^2$) aufgehängt, seitlich um die Strecke $s_0 = 0,05 \text{ m}$ ausgelenkt und zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ losgelassen.

Zu jedem Zeitpunkt wirkt auf die Masse m die unveränderliche Gewichtskraft F_g . Die seitliche Auslenkung erzeugt zusätzlich eine rückstellende Kraft F_r , die dafür sorgt, dass die Masse in Richtung ihrer ursprünglichen Ruhelage beschleunigt wird, sobald sie losgelassen wird.

Betrachtet man die Kräfte am Ort der ausgelenkten Masse genauer, so erkennt man, dass es eine dritte Kraft F_f gibt (in Abb. 7 nicht mit eingezeichnet), die den Faden gespannt hält. Die drei Kräfte F_g , F_r und F_f bilden ein Kräfteparallelogramm (Abb. 8). Der Winkel zwischen F_f und F_g ist genauso groß wie der Winkel zwischen dem Pendelfaden in

Ruhelage und im ausgelenkten Zustand. Die für die Beschleunigung in Richtung Ruhelage wirksame Kraft F_r lässt sich anhand einfacher trigonometrischer Beziehungen angeben zu

$$F_r = F_g \cdot \sin \varphi \quad (33)$$

Der Winkel φ findet sich ebenfalls wieder in dem Dreieck nach Abb. 9, hierbei ist h die Höhe, um die die Masse bei der Auslenkung angehoben wird, b der Bogen, auf dem sich die Pendelmasse bewegt und s die Sekante vom aktuellen Ort des Pendels P' zur Ruhelage P . Für die Bogenlänge b gilt

$$b = \ell \cdot \varphi \quad (\varphi \text{ im Bogenmaß!}) \quad (34)$$

Ist die Auslenkung hinreichend klein, so ist die Länge der Sekante s ungefähr gleich der Bogenlänge b , außerdem gelten dann die Näherungen

$$\begin{aligned} \gamma &\cong \varphi \\ \sin \varphi &\cong \varphi \end{aligned} \quad (35)$$

Löst man (34) nach φ auf und verwendet in (33) die Näherung (35), so erhält man für die rückstellende Kraft den Ausdruck

$$F_r = F_g \cdot \frac{s}{\ell} \quad (36)$$

Da s von der Zeit t abhängt und F_g und ℓ Konstanten sind, ergibt sich somit für die rückstellende Kraft der Ausdruck

$$F_r(t) = \frac{F_g}{\ell} \cdot s(t) \quad (37)$$

Nach der bekannten Gleichung für die Bestimmung der Gewichtskraft erhält man somit

$$F_r(t) = \frac{m \cdot g}{\ell} \cdot s(t) \quad (38)$$

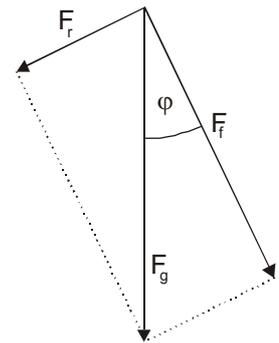


Abb. 8: Kräfte an der ausgelenkten Pendelmasse

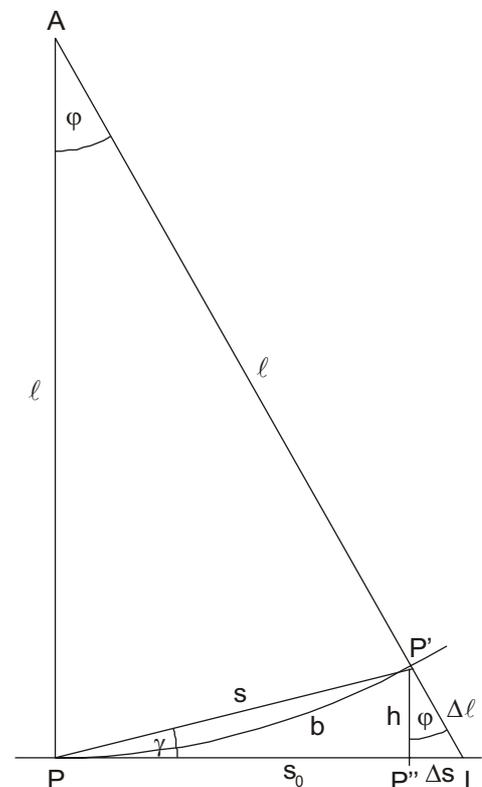


Abb. 9: Streckenbeziehungen

Diese Kraft bildet zusammen mit der Trägheitskraft F_m ein Kräftegleichgewicht (vergl. Glg. (14)) und es ergibt sich

$$\frac{m \cdot g}{\ell} \cdot s(t) + m \cdot \ddot{s}(t) = 0 \quad (39)$$

Diese Differenzialgleichung ist nun wie in 1.4.5 beschrieben zu lösen.

Ansatz:

Am einfachsten lässt sich der Ansatz nach Glg. (23) verwenden, es gilt somit

$$s(t) = k_1 \cdot \cos(k_2 \cdot t) \quad \text{und} \quad \ddot{s}(t) = -k_2^2 \cdot s(t)$$

Eingesetzt in (39) erhält man so

$$\frac{m \cdot g}{\ell} \cdot s(t) - m \cdot k_2^2 \cdot s(t) = 0 \quad (40)$$

Nach Division durch $m \cdot s(t)$ und auflösen nach k_2 erhält man daraus

$$k_2 = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \quad (41)$$

Randbedingung:

Zum Zeitpunkt des Loslassens ist $t_0 = 0$ und das Pendel ist maximal um s_0 zur Seite ausgelenkt. Also gilt

$$s(t_0) = s_0 = k_1 \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}} \cdot t_0\right) \quad (42)$$

Für $t_0 = 0$ ist der Cosinus gleich Eins, also erhält man auch hier

$$k_1 = s_0 \quad (43)$$

also lautet die vollständige Bewegungsgleichung

$$s(t) = s_0 \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}} \cdot t\right) \quad (44)$$

Mit den angegebenen Größen erhält man daraus konkrete Zahlenwerte, die die Schwingung beschreiben:

Kreisfrequenz:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}} = \sqrt{\frac{9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{1 \text{m}}} = 3,13 \frac{1}{\text{s}} \quad (45)$$

Frequenz:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{3,13}{2\pi} = 0,498 \text{Hz} \quad (46)$$

Periodendauer:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{0,498 \text{Hz}} = 2,01 \text{s} \quad (47)$$

Geschwindigkeit im Nulldurchgang:

Nach der Zeit T hat das Pendel seine Anfangsposition (maximale Auslenkung) wieder erreicht, nach der Hälfte dieser Zeit den gegenüberliegenden Maximalpunkt und nach einem Viertel der Zeit vollführt es den Nulldurchgang. Nach den Glg (46) und (47) gilt somit

$$t_{\text{Null}} = \frac{T}{4} = \frac{1}{4f} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\omega} \quad (48)$$

Da sich die Geschwindigkeit aus der 1. Ableitung von $s(t)$ ergibt (siehe Glg. (18)), gilt also für die Geschwindigkeit im Nulldurchgang

$$v(t_{\text{Null}}) = \dot{s}(t_{\text{Null}}) = -s_0 \cdot \omega \cdot \sin\left(\omega \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\omega}\right) = -s_0 \cdot \omega \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -s_0 \cdot \omega$$

Einsetzen der Zahlenwerte ergibt

$$v(t_{\text{Null}}) = -0,05\text{m} \cdot 3,13 \frac{1}{\text{s}} = -0,157 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Kinetische Energie:

Damit erhält man für die kinetische Energie im Nulldurchgang

$$E_{\text{kin}}(t_{\text{Null}}) = \frac{1}{2} m \cdot v_{\text{Null}}^2 = \frac{1}{2} \cdot 1\text{kg} \cdot \left(-0,157 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 = 0,0122\text{J}$$

dies ist gleichzeitig die Gesamtenergie, da zu diesem Zeitpunkt die potenzielle Energie Null ist (vergl. 1.4.1).

Man sieht, dass die Pendelbewegung ausschließlich durch die Fadenlänge und die Fallbeschleunigung bestimmt wird, die Pendelmasse selbst spielt keine Rolle. In der Praxis wird man allerdings die Pendelmasse so groß wie möglich wählen, um den Einfluss der Luftreibung und der unvermeidlichen Fadenmasse zu minimieren. Wegen der in (36) verwendeten Näherung gelten diese Angaben außerdem nur für kleine Pendelausschläge ($s_0 \ll \ell$).

1.6.2 U-Rohr-Schwingung

Eine Flüssigkeit der Dichte $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ befindet sich in einem U-förmig gebogenen oben offenen Rohr mit dem Durchmesser $d = 2 \text{ cm}$. Die Länge der Flüssigkeitssäule sei $\ell = 0,5 \text{ m}$. Wird z.B. durch Einblasen in den einen Schenkel des U-Rohres die Flüssigkeitssäule um die Strecke $s_0 = 0,05 \text{ m}$ ausgelenkt, so führt sie anschließend Schwingungen um ihre Ruhelage aus. Zunächst ist eine Aussage über die rückstellende Kraft F_r zu treffen, die die Flüssigkeitssäule in ihre Ausgangslage zurück beschleunigt.

Wie man in Abb. 10 entnehmen kann, befindet sich zwischen den Punkten P und P' ein Teil der Flüssigkeit, die auf die darunter liegende Säule eine Kraft ausübt, im übrigen Teil der Flüssigkeit heben sich alle Kräfte gegenseitig auf. Die Gewichtskraft dieses Säulenabschnittes erzeugt die rückstellende Kraft. Für sie gilt

$$F_r(t) = m_h \cdot g \quad (49)$$

wobei m_h die Masse der zugehörigen Säule ist. Unter der Annahme eines kreisförmigen Querschnitts erhält man

$$m_h = V_h \cdot \rho \quad (50)$$

Mit der Formel zur Berechnung des Volumens eines Zylinders mit der Höhe Δh und dem Radius $r = d / 2$ ergibt sich

$$V_h = \pi \cdot r^2 \cdot \Delta h \quad (51)$$

Zwischen Δh und dem zeitabhängigen Ort $s(t)$ der Oberfläche der Flüssigkeitssäule besteht die Beziehung

$$\Delta h = 2 \cdot s(t) \quad (52)$$

Einsetzen von (52), (51) und (50) in (49) ergibt für die rückstellende Kraft

$$F_r(t) = 2 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \rho \cdot g \cdot s(t) \quad (53)$$

Diese wirkt beschleunigend auf die Masse m_s der gesamten Flüssigkeitssäule, für die analog nach (50) gilt:

$$m_s = \pi \cdot r^2 \cdot \rho \cdot \ell \quad (54)$$

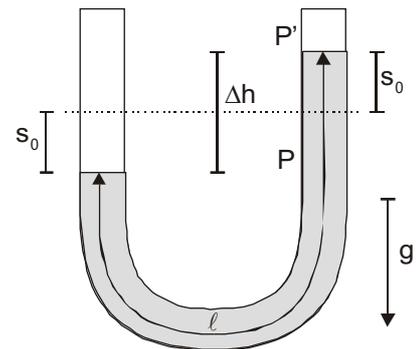


Abb. 10: Schwingende Flüssigkeitssäule

Damit erhält man für die Trägheitskraft F_m den Ausdruck

$$F_m(t) = \pi \cdot r^2 \cdot \rho \cdot \ell \cdot a(t) \quad (55)$$

Somit lautet die Differenzialgleichung

$$2 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \rho \cdot g \cdot s(t) + \pi \cdot r^2 \cdot \rho \cdot \ell \cdot \ddot{s}(t) = 0 \quad (56)$$

In dieser Gleichung kürzt sich der beiden Summanden gemeinsame Faktor $\pi \cdot r^2 \cdot \rho$ heraus, man erhält

$$2 \cdot g \cdot s(t) + \ell \cdot \ddot{s}(t) = 0 \quad (56a)$$

$$s(t) = -\frac{\ell}{2 \cdot g} \cdot \ddot{s}(t) \quad (56b)$$

Mit dem bereits bekannten Ansatz ergibt sich (vergl Glg. (39) - (41))

$$k_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot g}{\ell}} \quad (57)$$

$$k_1 = s_0 \quad (58)$$

somit lautet die vollständige Bewegungsgleichung

$$s(t) = s_0 \cdot \cos(\omega \cdot t) \quad \text{mit } \omega = \sqrt{\frac{2 \cdot g}{\ell}} \quad (59)$$

Einsetzen der gegebenen Zahlenwerte liefert

$$\text{Kreisfrequenz: } \omega = 2 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{0,5\text{m}}} = 6,264\text{s}^{-1}$$

$$\text{Frequenz: } f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{6,264\text{s}^{-1}}{2\pi} = 0,997\text{Hz}$$

$$\text{Periodendauer: } T = \frac{1}{f} = \frac{1}{0,997\text{Hz}} = 1,003\text{s}$$

$$\text{Nulldurchgang: } v_{\text{Null}} = -s_0 \cdot \omega = -0,05\text{m} \cdot 6,264\text{s}^{-1} = -0,313 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\text{Bewegte Masse: } m = \pi \cdot r^2 \cdot \ell \cdot \rho = \pi(0,01\text{m})^2 \cdot 0,5\text{m} \cdot 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 0,157\text{kg}$$

$$\text{Gesamtenergie: } E_{\text{ges}} = \frac{1}{2} m \cdot v_{\text{Null}}^2 = \frac{1}{2} \cdot 0,157\text{kg} \cdot \left(0,313 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 = 7,700\text{mJ}$$

Man beachte, dass hier die zeitabhängigen Größen von der Dichte der Flüssigkeit und dem Durchmesser der Säule unabhängig sind und lediglich durch deren Länge und die Fallbeschleunigung bestimmt werden.

1.6.3 Feder-Masse-Pendel

An eine Feder im Laborsystem ($g = 9,81 \text{ m/s}^2$) werde eine Masse $m = 0,25 \text{ kg}$ angehängt, dabei dehnt sich die Feder um $d = 0,12 \text{ m}$ aus. Anschließend wird sie aus dieser Ruhelage um $s_0 = 0,05 \text{ m}$ ausgelenkt und losgelassen (vergl. Abb. 11).

Aus der Ausdehnung d der Feder durch das Anhängen der Masse m lässt sich die Federkonstante D bestimmen:

$$F_g = D \cdot d \Rightarrow D = \frac{F_g}{d} = \frac{m \cdot g}{d} \quad (60)$$

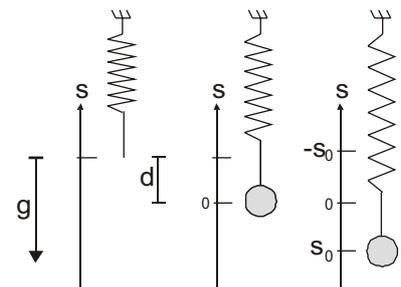


Abb. 11: Feder-Masse-Pendel

Für die rückstellende Kraft gilt

$$F_r(t) = D \cdot s(t) \quad (61)$$

somit erhält man die Differenzialgleichung

$$D \cdot s(t) + m \cdot \ddot{s}(t) = 0 \quad (62)$$

mit dem trigonometrischen Ansatz für $s(t)$ und der dazugehörigen 2. Ableitung

$$s(t) = k_1 \cdot \cos(k_2 \cdot t)$$

$$\ddot{s}(t) = -k_1 \cdot k_2^2 \cdot \cos(k_2 \cdot t) = -k_2^2 \cdot s(t)$$

ergibt sich daraus durch Einsetzen

$$D \cdot s(t) - m \cdot k_2^2 \cdot s(t) = 0 \quad (62a)$$

Division durch $s(t)$ und auflösen nach k_2 liefert

$$k_2 = \sqrt{\frac{D}{m}} \quad (63)$$

Einsetzen der Randbedingung $s(t_0) = s_0$ ergibt für den zweiten Parameter

$$s(t_0 = 0) = s_0 = k_1 \cdot \cos(k_2 \cdot 0) = k_1 \quad (64)$$

damit lautet die Bewegungsgleichung

$$s(t) = s_0 \cdot \cos(\omega \cdot t) \quad \text{mit} \quad \omega = \sqrt{\frac{D}{m}} \quad (65)$$

Einsetzen der gegebenen Zahlenwerte liefert

$$\text{Federkonstante:} \quad D = \frac{0,25 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{0,12 \text{ m}} = 20,4 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$\text{Kreisfrequenz:} \quad \omega = \sqrt{\frac{20,4 \frac{\text{N}}{\text{m}}}{0,25 \text{ kg}}} = 9,042 \text{ s}^{-1}$$

$$\text{Frequenz:} \quad f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{9,042 \text{ s}^{-1}}{2\pi} = 1,439 \text{ Hz} \quad f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{9,042 \text{ s}^{-1}}{2\pi} = 1,439 \text{ Hz}$$

$$\text{Periodendauer:} \quad T = \frac{1}{f} = \frac{1}{1,439 \text{ Hz}} = 0,650 \text{ s}$$

$$\text{Nulldurchgang:} \quad v_{\text{Null}} = -s_0 \cdot \omega = -0,05 \text{ m} \cdot 9,042 \text{ s}^{-1} = -0,452 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\text{Gesamtenergie:} \quad E_{\text{ges}} = \frac{1}{2} m \cdot v_{\text{Null}}^2 = \frac{1}{2} \cdot 0,25 \text{ kg} \cdot \left(0,452 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 = 25,55 \text{ mJ}$$

$$\text{Spannenergie:} \quad E_{\text{Spann}} = \frac{1}{2} D \cdot s_0^2 = \frac{1}{2} \cdot 20,4 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot (0,05 \text{ m})^2 = 25,5 \text{ mJ}$$

Man beachte, dass außer für die Bestimmung der Federkonstanten die Fallbeschleunigung g nicht benötigt wird und keinen Einfluss auf die Schwingungsdauer hat. Die Spannenergie der Feder, die durch eine von außen ausgeübte Kraft dem System ursprünglich zugeführt wurde, ist (bis auf Rundungsfehler) genauso groß wie die Gesamtenergie des Systems.

1.7 Graphische Darstellung des Bewegungsablaufes

Nach 1.4.3 lassen sich bei Kenntnis von $s(t)$ auch Aussagen über die Geschwindigkeit und die Beschleunigung zu jedem Zeitpunkt der Bewegung treffen. Es gilt

$$s(t) = s_0 \cdot \cos(\omega \cdot t) \quad (66)$$

$$v(t) = \dot{s}(t) = -s_0 \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t) \quad (67)$$

$$a(t) = \ddot{s}(t) = -s_0 \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega \cdot t) \quad (68)$$

Diese Darstellung nach Abb. 12 trifft prinzipiell auf jede Schwingung zu. (Die Hochachse wurde hier nicht mit einer Beschriftung versehen, da je nach Graph unterschiedliche Einheiten / Skalierungen anzuwenden wären.)

Eine solche Schwingung stellt den Idealfall dar, wobei man davon ausgeht, dass dem System keine Energie durch Reibungsverluste o.ä. verloren geht. Ohne diese Verluste hält die Schwingung beliebig lange an und die Amplituden der einzelnen Größen sind konstant. Sie wird deshalb als **ungedämpfte Schwingung** bezeichnet.

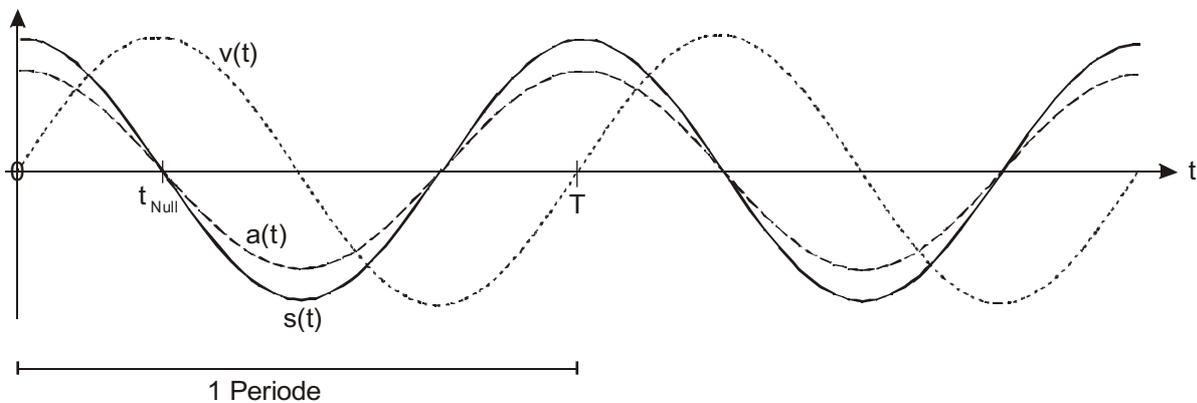


Abb. 12: Zeitlicher Ablauf der Bewegung

1.8 Energiebilanz während der Schwingung

Nach Kap. 1.3.2 muss die Summe von kinetischer und potenzieller Energie zu jedem Zeitpunkt konstant und gleich der Gesamtenergie sein. Allen bisher behandelten Schwingungen gemeinsam ist dabei das Vorliegen eines linearen Kraftgesetzes für die rückstellende Kraft F_r :

Feder-Masse-Pendel

$$F_r(t) = D \cdot s(t)$$

Fadenpendel

$$F_r(t) = \frac{m \cdot g}{\ell} \cdot s(t)$$

U-Rohr-Schwingung

$$F_r(t) = 2 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \rho \cdot g \cdot s(t)$$

Allgemein gilt damit für die potenzielle Energie zu einem beliebigen Zeitpunkt (D kann entsprechend substituiert werden)

$$E_{\text{pot}}(t) = \frac{1}{2} D \cdot s(t)^2 \quad (69)$$

Für die kinetische Energie gilt entsprechend

$$E_{\text{kin}}(t) = \frac{1}{2} m \cdot v(t)^2 = \frac{1}{2} m \cdot \dot{s}(t)^2 \quad (70)$$

Durch Einsetzen der entsprechenden Funktion für $s(t)$ und $\dot{s}(t)$, Zusammenfassen und Ausklammern erhält man somit

$$E_{\text{ges}} = E_{\text{pot}}(t) + E_{\text{kin}}(t) = \frac{1}{2} D \cdot (s_0 \cdot \cos(\omega \cdot t))^2 + \frac{1}{2} m \cdot \left(s_0 \cdot \sqrt{\frac{D}{m}} \sin(\omega \cdot t) \right)^2$$

$$\Rightarrow E_{\text{ges}} = \frac{1}{2} D \cdot s_0^2 \cdot \cos^2(\omega \cdot t) + \frac{1}{2} m \cdot s_0^2 \cdot \frac{D}{m} \sin^2(\omega \cdot t) = \frac{1}{2} D \cdot s_0^2 \cdot (\cos^2(\omega \cdot t) + \sin^2(\omega \cdot t)) = \frac{1}{2} D \cdot s_0^2 \quad \text{q.e.d.}$$

1.9 Gedämpfte Schwingungen

In der Realität geht bei jeder Schwingung durch Reibungsverluste in jeder Periode ein bestimmter Prozentsatz der Energie verloren, weil das System nun nicht mehr abgeschlossen ist. Beträgt der Energieverlust pro Periode p Prozent, so ergibt sich aus der Anfangsenergie E_0 nach der 1. Periode die Gesamtenergie E_1 zu

$$E_1 = p \cdot E_0$$

nach der 2. Periode erhält man

$$E_2 = p \cdot E_1 = p^2 \cdot E_0$$

und entsprechend allgemein nach n Perioden

$$E_n = p^n \cdot E_0$$

Grundsätzlich führt das dazu, dass die Amplitude der Schwingung exponentiell abnimmt. Die Schwingungsgleichung muss nun also korrigiert werden zu

$$s(t) = s_0 \cdot e^{-k \cdot t} \cdot \cos(\omega \cdot t) \quad (71)$$

wobei der Koeffizient $e^{-k \cdot t}$ die Abnahme der Amplitude bestimmt. Die Konstante k wird als **Dämpfungskonstante** bezeichnet. Da der Energieverlust von der Momentangeschwindigkeit abhängt, ergibt sich als Ansatz eine Differenzialgleichung der Form

$$D \cdot s(t) + R \cdot \dot{s}(t) + m \cdot \ddot{s}(t) = 0 \quad (72)$$

wobei R als Reibungskoeffizient bezeichnet wird. Diese Gleichung kann nur noch über den exponentiellen Ansatz (vergl. 1.4.4.1) gelöst werden, was hier jedoch zu weit führen würde. Den zeitlichen Verlauf einer gedämpften Schwingung nach Glg. (71) zeigt Abb 13. Die beiden gestrichelten Einhüllenden zeigen den exponentiellen Abfall der Amplitude. Eine solche Schwingung heißt **gedämpfte Schwingung**.

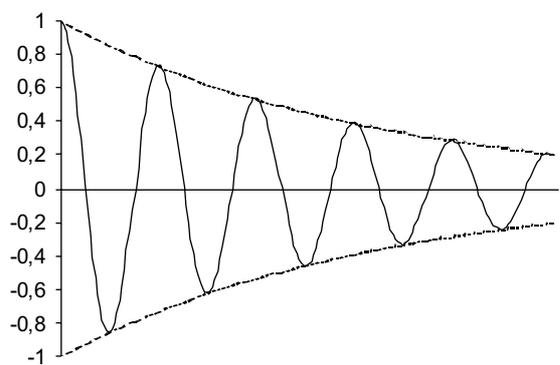


Abb. 13: Exponentielle Abnahme der Amplitude bei einer gedämpften Schwingung

1.10 Erzwungene Schwingungen

Um trotz evt. Reibungsverluste eine kontinuierliche Schwingung aufrecht zu erhalten, muss die pro Zeiteinheit „verlorene“ Energie dem System wieder zugeführt werden. So, wie man einem auf einer Schaukel sitzenden Kind immer im „richtigen“ Augenblick einen kleinen Stoß gibt, muss diese Energiezufuhr entweder zu einem geeigneten Zeitpunkt oder kontinuierlich erfolgen. Gestaltet man die Energiezufuhr durch einen Stoß am Ende jeder Periode, so ist die so entstehende Schwingung nicht mehr harmonisch (vergl. Abb 14), da sie keinen (co-) sinus förmigen Verlauf mehr hat. Sie ist zwar nach wie vor periodisch, aber nunmehr nicht mehr harmonisch.

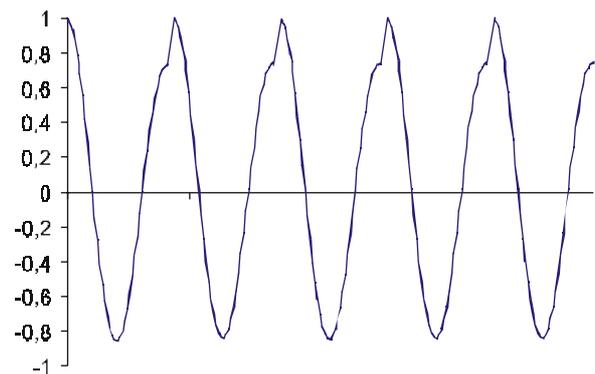


Abb. 14: Periodische, aber nicht harmonische Schwingung bei punktueller Energiezufuhr am Ende jeder Periode

Die Reibungsverluste sind proportional zur Geschwindigkeit, damit gilt für den Energieverlust $\Delta E(t)$

$$\Delta E(t) \sim \dot{s}(t) = s_0 \cdot \omega \cdot k \cdot e^{-k \cdot t} \cdot \sin(\omega \cdot t) \quad (73)$$

Der Energieverlust ist also am größten, wenn die Schwingung einen Nulldurchgang vollführt, da dann auch die Geschwindigkeit am größten ist, denn es gilt

$$\sin(\omega \cdot t) = \cos\left(\omega \cdot t - \frac{\pi}{2}\right) \quad (74)$$

Damit also die Gesamtenergie der Schwingung zu jedem Zeitpunkt konstant bleibt, muss die Anregung durch eine Schwingung erfolgen, die der Gleichung

$$s_E(t) = s_{E0} \cdot \sin(\omega \cdot t) \quad (75)$$

folgt (der Index E steht hier für Erreger), ist also gegenüber der tatsächlich ablaufenden Schwingung um $\pi/2 = 90^\circ$ phasenverschoben. Außerdem muss sie im Idealfall mit der gleichen Kreisfrequenz ω erfolgen.

Weicht die Erregerfrequenz von der Kreisfrequenz der Schwingung ab, erfolgt die Energieübertragung nicht mehr „optimal“, das heißt, die Amplitude der erzwungenen Schwingung nimmt ab. Gleichzeitig verändert sich die Phasenbeziehung zwischen Erregerschwingung und erzwungener Schwingung. Im weiteren wird mit ω_E die Erregerfrequenz und mit ω_0 die Frequenz der freien Schwingung bezeichnet, die das System ohne Fremderregung ausführen würde - diese Frequenz wird auch **Eigenfrequenz** des schwingungsfähigen Systems genannt.

Ist die Erregerfrequenz ω_E kleiner als ω_0 , so nimmt der Phasenabstand von 90° (vergl. Glg. (74)) bis auf 0 ab (das System wird von dem Erreger „geführt“), ist sie größer, so nimmt sie bis auf 180° zu, wobei die Amplitude immer geringer wird. Je nach Dämpfung ist die Resonanzüberhöhung unterschiedlich groß: bei starker Dämpfung verläuft die Kurve flacher (Abb. 15, Kurve 1), bei geringerer Dämpfung ist der **Resonanzpeak** steiler (Abb. 15, Kurve 2).

Ist die von außen zugeführte Energie größer als der Energieverlust durch die Dämpfung, kommt es zur sogenannten **Resonanzkatastrophe**: die Amplitude der Schwingung wird immer größer und zerstört letztendlich das schwingungsfähige System (Abb. 15, Kurve 3).

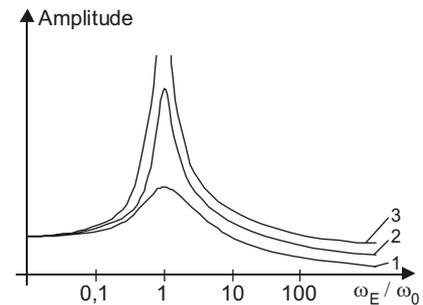


Abb. 15: Resonanzkurven bei verschieden starker Dämpfung

1.11 Elektrischer Schwingkreis

Abschließend soll ein nicht-mechanisches Beispiel eines schwingungsfähigen Systems vorgestellt werden. Die bisher verwendete Vorgehensweise ist hier aber genauso anwendbar.

Dazu benötigt man zwei Energiespeicher, die die Schwingungsenergie jeweils von einer Form in die andere überführen können. Man verwendet hierbei einen Kondensator mit der Kapazität C , der die Energie in seinem elektrischen Feld speichert, sowie eine Spule mit der Induktivität L , die sie im magnetischen Feld speichert. Kondensator und Spule werden parallel geschaltet. Ein definierter Anfangszustand wird hergestellt, indem man durch Schließen des Schalters S den Kondensator mit einer Spannungsquelle verbindet und so mit der Spannung U_0 auflädt. Die Schwingung beginnt zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ nach Öffnen des Schalters (vergl. Abb. 16). Die Schwingung kann z.B. mit einem Oszilloskop beobachtet werden, der aber für die Vorgänge im Schwingkreis ignoriert werden kann.

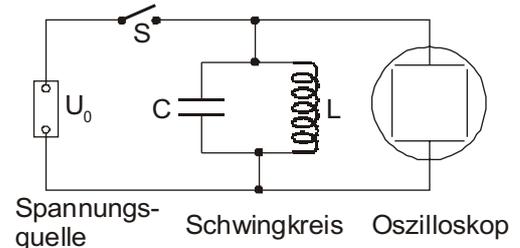


Abb. 16: LC-Schwingkreis, bestehend aus Kondensator C und Induktivität L

Nach Öffnen des Schalters bilden Spule und Kondensator eine Parallelschaltung, für die gilt, dass die Spannung an allen Komponenten der Schaltung zu jedem Zeitpunkt t gleich groß ist. Damit ergibt sich die Gleichung

$$U_C(t) = U_L(t) \quad (76)$$

Für die Spannung an einem Kondensator gilt

$$U_C(t) = \frac{1}{C} \cdot Q(t) \quad (77)$$

und für die Spannung an der Spule gilt nach dem Induktionsgesetz

$$U_L(t) = -L \cdot \dot{I}(t) \quad (78)$$

Damit erhält man durch Einsetzen in Glg. (76) die Gleichung

$$\frac{1}{C} \cdot Q(t) = -L \cdot \dot{I}(t) \quad (79)$$

Der elektrische Strom ist definiert als transportierte Ladung pro Zeiteinheit, also gilt

$$I(t) = \dot{Q}(t) \quad (80a)$$

damit ergibt sich

$$\dot{I}(t) = \ddot{Q}(t) \quad (80b)$$

Setzt man dies in Glg. (79) ein und multipliziert beide Seiten der Gleichung mit C, so erhält man die Differenzialgleichung

$$Q(t) = -L \cdot C \cdot \ddot{Q}(t) \quad (81)$$

Lösungsansatz:

$$Q(t) = k_1 \cdot \cos(k_2 \cdot t) \quad (82)$$

$$\dot{Q}(t) = -k_1 \cdot k_2 \cdot \sin(k_2 \cdot t)$$

$$\ddot{Q}(t) = -k_1 \cdot k_2^2 \cdot \cos(k_2 \cdot t) = -k_2^2 \cdot Q(t) \quad (83)$$

Einsetzen von (83) in (81) ergibt

$$Q(t) = L \cdot C \cdot k_2^2 \cdot Q(t)$$

Auflösen nach k_2 ergibt

$$k_2 = \omega = \sqrt{\frac{1}{L \cdot C}} \quad (84)$$

Randbedingung:

Zum Zeitpunkt t_0 ist der Kondensator auf die Spannung U_0 aufgeladen, zu diesem Zeitpunkt enthält er also die Ladung

$$Q_0 = U_0 \cdot C$$

Eingesetzt in Glg. (82) ergibt mit $t_0 = 0$

$$Q_0 = Q(t_0 = 0) = k_1 \cdot \cos(k_2 \cdot 0) = k_1$$

Damit lautet die vollständige Gleichung für $Q(t)$

$$Q(t) = Q_0 \cdot \cos(\omega \cdot t) \quad \text{mit} \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{L \cdot C}} \quad (85)$$

Mit konkreten Werte erhält man für $U_0 = 5 \text{ V}$, $C = 0,1 \text{ } \mu\text{F}$ und $L = 100 \text{ mH}$

$$\text{Kreisfrequenz:} \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{L \cdot C}} = \sqrt{\frac{1}{0,1\text{H} \cdot 1 \cdot 10^{-6} \text{F}}} = 3162\text{s}^{-1}$$

$$\text{Frequenz:} \quad f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{3162\text{s}^{-1}}{2\pi} = 503\text{Hz}$$

$$\text{Periodendauer:} \quad T = \frac{1}{f} = \frac{1}{503\text{Hz}} = 1,987\text{ms}$$

$$\text{Gesamtenergie:} \quad E_{\text{ges}} = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U_0^2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 10^{-6} \text{F} \cdot (5\text{V})^2 = 12,5\mu\text{J}$$

Der **Höchstwert** des Stromes ergibt sich nach Glg. (80a) aus der 1. Ableitung von $Q(t)$ (mit $\sin(\omega \cdot t) = 1$) zu

$$\hat{I} = Q_0 \cdot \sqrt{\frac{1}{L \cdot C}} = U_0 \cdot C \cdot \omega = 5\text{V} \cdot 1 \cdot 10^{-6} \text{F} \cdot 3162\text{s}^{-1} = 15,8\text{mA}$$

2 Wellen

In Kapitel 1 wurden schwingungsfähige Systeme behandelt, die (bis auf Reibung) in sich abgeschlossen sind. Sie bestehen aus genau einem Objekt, das eine Schwingung ausführt, sei es eine Masse m bei den mechanischen oder eine Ladung Q bei den elektrischen Schwingungen. Ein solches schwingungsfähiges System wird als **Oszillator** (dtsch.: „Schwinger“) bezeichnet.

Ordnet man mehrere solche Oszillatoren nebeneinander an und sorgt dafür, dass von einem Oszillator zum nächsten eine Energieübertragung stattfinden kann, spricht man von einer **Oszillatorkette**.

2.1 Gekoppelte Feder-Masse-Pendel als mechanische Oszillatorkette

Hängt man eine hantelförmige Masse an einem Faden auf, entsteht ein sog. **Torsionspendel**, das vergleichbar ist mit einem Feder-Masse-Pendel, wobei die beiden symmetrisch angeordneten Massen an ihrem Arm die Masse m und die Torsionswirkung des Fadens die Federkonstante D repräsentieren. Wird der Arm einmal aus seiner Ruhelage ausgelenkt, führt er um seine Ruhelage Dreh-schwingungen aus (vergl. Abb. 17).

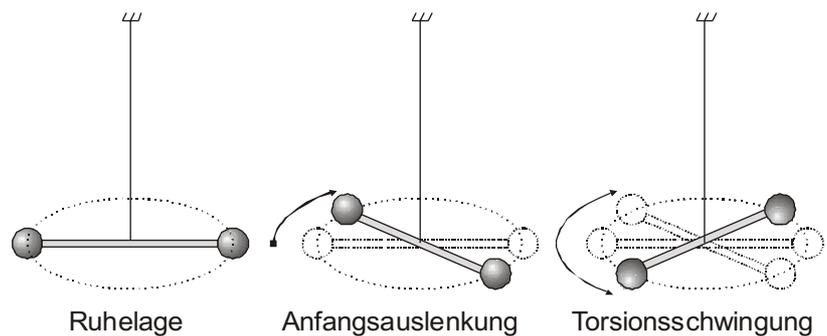


Abb. 17: Drehschwingung eines Torsionspendels

Ordnet man an diesen Faden mehrere solcher Pendel untereinander an und spannt den Faden oben und unten ein, so erhält man ein System von gekoppelten Pendeln. Wird nun das oberste Pendel ausgelenkt, entsteht durch den Faden eine Kraft, mit der das darunter angeordnete Pendel ebenfalls ausgelenkt wird. Dabei sorgt die Trägheit seiner Masse für eine zeitlich verzögerte Bewegung. Da sich dadurch nun auch das zweite Pendel bewegt, erfolgt durch den Faden nun auch eine Kraft auf das dritte Pendel usw.

Je stärker der Faden gespannt wird, desto größer ist die Kraftübertragung zwischen jeweils zwei benachbarten Pendeln.

Da durch den Faden Energie übertragen wird, nimmt die Schwingungsenergie des ersten Pendels genau in dem Maße ab wie die des zweiten zunimmt. Nach einer gewissen Zeit ist seine gesamte Energie auf das zweite Pendel übertragen worden und das erste Pendel ist in seine Ruhelage zurückgekehrt. Gleichzeitig hat das zweite Pendel bereits einen Teil seiner aufgenommenen Energie bereits an das dritte Pendel weitergeleitet usw.

Die am oberen Pendelarm zugeführte Energie wird als an die darunter angeordneten Pendel übertragen und gelangt letztendlich bis zum untersten Pendel der Anordnung, während das obere wieder zur Ruhe gekommen ist. Dieser Prozess stellt also einen **Energietransport** dar.

Betrachtet man nur die Auslenkung der einzelnen Pendel in Abhängigkeit von der Zeit, so ergibt sich das Diagramm nach Abb. 19. Man sieht, dass die ursprüngliche Form der am ersten Pendel ausgeführten Bewegung nacheinander alle anderen Pendel durchläuft. Diese Ausbreitung einer Bewegung durch eine Oszillatorkette bezeichnet man als **Welle**.

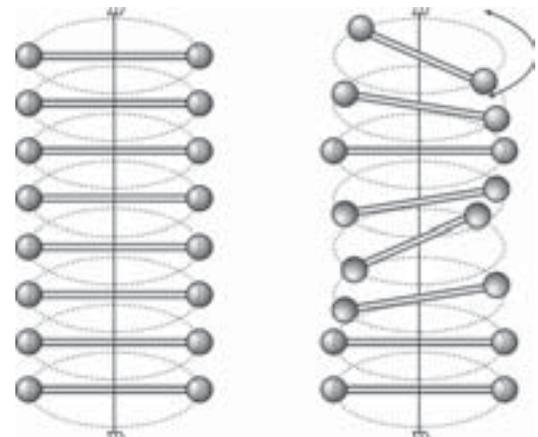


Abb. 18: System gekoppelter Pendel in Ruhelage (links) und nach einmaliger Energiezufuhr (rechts)

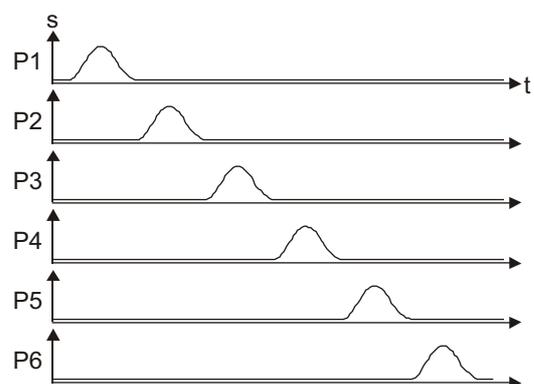


Abb. 19: Ausbreitung einer Störung auf einer Oszillatorkette

2.2 Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Welle

Betrachtet man in Abb. 19 nur die ersten beiden Oszillatoren, so erkennt man, dass der Verlauf der Schwingung des zweiten Oszillators dem des ersten gleicht, aber zeitlich versetzt ist.

Gilt für den zeitlichen Verlauf der Schwingung des ersten Oszillators die (nicht zwingend periodische) Schwingungsgleichung

$$A_1(t) = A(t) \quad (86)$$

so lautet wegen der zeitlichen Verzögerung um Δt die Schwingungsgleichung für den 2. Oszillator

$$A_2(t) = A(t - \Delta t) \quad (87)$$

Der zweite Oszillator befindet sich an einem anderen Ort als der erste, der Abstand zwischen den Oszillatoren sei Δs . Dann gilt für die Ausbreitungsgeschwindigkeit v_c der Welle

$$v_c = \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad (88)$$

Ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit bekannt, kann man Glg. (88) in (87) einsetzen und erhält

$$A_2(t) = A\left(t - \frac{\Delta s}{v_c}\right) \quad (89)$$

Betrachtet man nun einen beliebigen Oszillator in der Entfernung s vom ersten, ergibt sich aus (89) die Gleichung

$$A_s(t) = A\left(t - \frac{s}{v_c}\right) \quad (90)$$

Diese enthält nun zwei Variablen: t gibt an, zu welchem Zeitpunkt die Welle betrachtet wird und s den Ort, an dem die Amplitude der Welle angegeben wird. Damit erhält man die **allgemeine Wellengleichung**

$$A(s, t) = A\left(t - \frac{1}{v_c} \cdot s\right) \quad (91)$$

2.2 Beispiele für Oszillatorketten

Grundsätzlich kann jede Art von schwingungsfähigen Gebilden (Oszillatoren) zu einer Oszillatorkette verbunden werden. Zusätzlich zu den Oszillatoren benötigt man dazu eine Koppelung der einzelnen Oszillatoren, sodass eine Energieübertragung von einem Oszillator zum nächsten erfolgen kann. Je mehr Energie dabei pro Zeiteinheit übertragen wird, desto enger ist die Koppelung und umso größer ist damit die Geschwindigkeit des Energietransports und damit die Ausbreitungsgeschwindigkeit v_c der Welle.

2.2.1 Wellen auf einer Wasseroberfläche

Jedes Wassermolekül stellt einen Oszillator dar, das durch Bindungskräfte mit den benachbarten Wassermolekülen gekoppelt ist. Wird also ein Molekül in Schwingung versetzt, überträgt es seine Schwingungsenergie an die benachbarten Moleküle und versetzt diese ihrerseits in Schwingungen. Auf der Oberfläche breitet sich eine Welle aus (Metzler S. 127).

2.2.2 Schallwellen in Luft

In einem Gas befinden sich ebenfalls Moleküle, die aber nicht fest an ihre Nachbarmolekülen gekoppelt sind. Dafür besitzen sie auf Grund der Gastemperatur eine mittlere kinetische Energie, mit der sie sich im Raum bewegen. Stoßen sie dabei an andere Moleküle, so übertragen sie dabei einen Teil ihrer kinetischen Energie und ändern ihre Bewegungsrichtung. Je größer der Druck in einem Gas ist, desto geringer sind die Abstände zwischen den Molekülen und die Häufigkeit von Stößen nimmt zu. Wird nun an einer Stelle dem Gas Energie zugeführt, werden dabei die Moleküle alle in einer Richtung beschleunigt. Dabei entsteht ein erhöhter gerichteter Druck, der die Moleküle veranlasst, häufiger Stöße mit anderen Molekülen auszuführen, dabei nehmen sie die Energie auf, was ebenfalls zu einer Druckerhöhung führt, während der Druck bei den stoßenden Molekülen abnimmt. Es entsteht eine Druckwelle, die sich im Gas ausbreitet.

2.2.3 Schallwellen in Festkörpern

Auch hier handelt es sich um die Ausbreitung einer Druckwelle wie bei Gasen, allerdings ist die Koppelung der einzelnen Atome im Festkörper sehr viel enger, somit ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit deutlich höher als in Gasen.

2.3 Wellenausbreitung bei periodischer Anregung

Statt dem ersten Oszillator einer Oszillatorkette nicht nur einmalig Energie zuzuführen, kann man ihn auch durch eine entsprechende Anregung (\rightarrow erzwungene Schwingung) harmonisch schwingen lassen. Der zeitlich verzögerte Energietransport bewirkt nun die Ausbreitung einer Welle über die Oszillatorkette, die ebenfalls einen harmonischen Verlauf hat und damit ein periodisches Verhalten aufweist.

Der erste Oszillator bewege sich nach der Schwingungsgleichung

$$A_1(t) = A_0 \cdot \cos(\omega \cdot t) \quad (92)$$

wobei A_0 die Maximalauslenkung (Amplitude) und ω die Kreisfrequenz der Schwingung sei. Der nächste Oszillator folgt dieser Schwingung zeitlich versetzt, damit gilt für ihn die Schwingungsgleichung

$$A_2(t) = A_0 \cdot \cos(\omega \cdot (t - \Delta t)) \quad (93)$$

Der Abstand zwischen dem ersten und dem zweiten Oszillator sei Δs . Dann gilt nach Glg. (89)

$$A_2(t) = A_0 \cdot \cos\left(\omega \cdot \left(t - \frac{\Delta s}{v_c}\right)\right) \quad (94)$$

2.3.1 Wellenlänge

Eine periodische Schwingung ist charakterisiert durch ihre Periodendauer T . Wenn sich eine Welle mit der Geschwindigkeit v_c ausbreitet, die durch eine periodische Schwingung erzeugt wurde, weist auch die Welle selbst eine Periodizität auf, indem sie in bestimmten Abständen wieder die gleiche Amplitude aufweist. Nach $s = v \cdot t$ erhält man eine charakteristische Größe, die als **Wellenlänge** λ bezeichnet wird, es gilt

$$\lambda = v_c \cdot T \quad (95)$$

2.3.2 Wellengleichung in Abhängigkeit von der Zeit

Betrachtet man nun eine Oszillatorkette mit sehr vielen Oszillatoren, ergibt sich für die Schwingung eines beliebigen Oszillators am Ort s_1 die Schwingungsgleichung

$$A_{s_1}(t) = A_0 \cdot \cos\left(\omega \cdot \left(t - \frac{s_1}{v_c}\right)\right) \quad (96)$$

Auflösen der Klammer ergibt

$$A_{s_1}(t) = A_0 \cdot \cos\left(\omega \cdot t - \omega \cdot \frac{s_1}{v_c}\right) \quad (97)$$

wobei der zweite Summand eine Konstante ist, die ausschließlich von ω , s_1 und v_c abhängt und zu einer Phasenverschiebung φ_{s_1} führt:

$$\varphi_{s_1} = \omega \cdot \frac{s_1}{v_c} \quad (98)$$

Damit erhält die Glg. (97) die Form

$$A_{s_1}(t) = A_0 \cdot \cos(\omega \cdot t - \varphi_{s_1}) \quad (99)$$

Die Schwingung eines räumlich entfernten Oszillators folgt also dem Verlauf der ursprünglichen Schwingung des Erregers, ist aber um einen konstanten Phasenwinkel verschoben.

2.3.3 Wellengleichung in Abhängigkeit vom Ort

Betrachtet man den Zustand aller Oszillatoren der Oszillatorkette zu einem bestimmten Zeitpunkt t_1 , so ergibt sich analog nach Glg. (95) die folgende Gleichung, wobei φ_{t_1} den Phasenwinkel der Erregerschwingung zum Zeitpunkt t_1 angibt:

$$A_{t_1}(s) = A_0 \cdot \cos\left(-\frac{\omega}{v_c} \cdot s + \omega \cdot t_1\right) = A_0 \cdot \cos\left(-\frac{\omega}{v_c} \cdot s + \varphi_{t_1}\right) \quad (100)$$

2.3.4 Allgemeine Wellengleichung

Werden sowohl s als auch t als Variable aufgefasst, so erhält man

$$A(s, t) = A_0 \cdot \cos\left(\omega \cdot t - \frac{\omega}{v_c} \cdot s\right) \quad (101)$$

Mit $\omega = 2\pi \cdot f$ und $f = \frac{1}{T}$ erhält man daraus zunächst

$$A(s, t) = A_0 \cdot \cos\left(2\pi \cdot \frac{1}{T} \cdot t - \frac{\omega}{v_c} \cdot s\right) \quad (102)$$

Ebenso kann man den zweiten Term entsprechend ersetzen und erhält mit

$$\frac{\omega}{v_c} = \frac{2\pi}{v_c \cdot T} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

nach Ausklammern des gemeinsamen Faktors 2π die allgemeine Wellengleichung

$$A(s, t) = A_0 \cdot \cos\left(2\pi \cdot \left(\frac{t}{T} - \frac{s}{\lambda}\right)\right) \quad (103)$$

die es erlaubt, die Ausbreitung einer Welle sowohl in Abhängigkeit von der Zeit als auch dem Ort vollständig zu beschreiben, sofern die Wellenlänge der sich ausbreitenden Welle und die Periodendauer der erzeugenden Schwingung bekannt sind.

2.4 Ausbreitung von Wellen

Je nach Konstruktion der Oszillatorkette unterscheidet man drei verschiedene Formen der Wellenausbreitung:

- Lineare Wellen (z.B. Druckwelle längs eines Stabes)
- Ebene Wellen (z. B. auf einer Wasseroberfläche)
- Räumliche Wellen (z.B. in einem Gas)

Die Vorgänge bei räumlichen Wellen lassen sich auf die Vorgänge bei ebenen Wellen zurückführen, deshalb soll das Beispiel der ebenen Wellen hier näher erläutert werden.

2.4.1 Punktförmige Anregung

Wird einer Wasseroberfläche an einem Punkt Energie zugeführt (z.B. durch Eintauchen eines Körpers), breitet sich die Energie in allen Richtungen auf der Oberfläche mit gleicher Geschwindigkeit aus. Es erfolgt eine kreisförmige Ausbreitung, wie sie in Abb. 20 für drei verschiedene Zeitpunkte t_1 , t_2 und t_3 dargestellt ist.

Findet die Anregung des ersten Oszillators durch eine periodische Schwingung statt, so entsteht ein System von konzentrischen Kreisen, wie in Abb. 21 für einen bestimmten Zeitpunkt $t_5 = 5 \cdot T$ ($T =$ Periodendauer) gezeigt ist, wobei die Linien jeweils einen „Wellenberg“ markieren. Je länger die Anregung andauert, desto größer wird das Wellensystem und die Anzahl der einzelnen Kreiswellen.

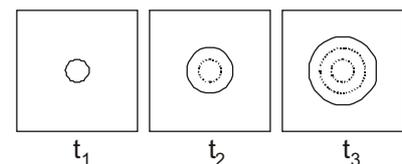


Abb. 20: Ausbreitung einer ebenen Welle auf einer Oberfläche

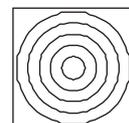


Abb. 21: Wellensystem

2.4.2 Überlagerung von Wellen

Wird die Oberfläche an zwei verschiedenen Stellen angeregt, entstehend folglich zwei Wellen. Da die Ausbreitung der Energie gerichtet erfolgt, können sich die beiden Wellen durchdringen und überlagern, ohne dass dabei eine gegenseitige Beeinflussung stattfindet (**Superpositionsprinzip**), wie in Abb. 22 für eine einmalige Anregung zweier Punkte gezeigt.

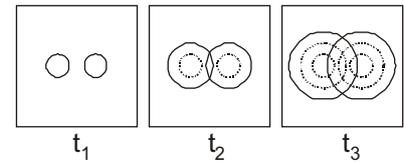


Abb. 22: Überlagerung zweier Wellen

Analog erhält man für eine periodische Anregung an zwei Punkten der Oberfläche zwei Wellensysteme, die sich aber ebenso ungehindert durchdringen können, wie in Abb. 23 gezeigt.

Betrachtet man einen beliebigen Punkt der Oberfläche, so wird der dort befindliche Oszillator nun von zwei Wellen zu Schwingungen angeregt. Für die Amplitude am Punkt P gilt folglich

$$A_P(t) = A_1(t, s_1) + A_2(t, s_2) \quad (104)$$

wobei s_1 und s_2 die Abstände des Punktes zu den beiden Erregerzentren sind. Beide Erregerzentren sollen zur Vereinfachung der Darstellung mit der gleichen Frequenz und phasengleich angeregt werden. Durch Einsetzen der entsprechenden Wellengleichungen (vergl Glg. (97)) erhält man somit

$$A_P(t) = A_0 \cdot \cos\left(\omega \cdot t - \omega \cdot \frac{s_1}{v_c}\right) + A_0 \cdot \cos\left(\omega \cdot t - \omega \cdot \frac{s_2}{v_c}\right) \quad (105)$$

Dabei sind nun folgende Sonderfälle zu betrachten:

1. Die beiden Wellen sind phasengleich
2. Die beiden Wellen haben entgegengesetzte Phase

Die Phasenverschiebung wird durch die Teilterme $\omega \cdot \frac{s_1}{v_c}$ und $\omega \cdot \frac{s_2}{v_c}$ bestimmt. Stimmen sie überein, so vereinfacht sich die Gleichung (101) zu

$$A_P(t) = A_0 \cdot \cos(\omega \cdot t - \Delta\varphi) + A_0 \cdot \cos(\omega \cdot t - \Delta\varphi) = 2 \cdot A_0 \cdot \cos(\omega \cdot t - \Delta\varphi) \quad (106)$$

Die resultierende Amplitude ist also doppelt so groß wie die Amplitude einer einzelnen Welle, was man als **konstruktive Überlagerung** bezeichnet.

Haben die beiden Wellen dagegen eine entgegengesetzte Phase, so gilt

$$\cos(\varphi) = -\cos(\varphi + \pi)$$

daraus ergibt sich für die Amplitude am Punkt P

$$A_P(t) = A_0 \cdot \cos(\omega \cdot t - \Delta\varphi) + A_0 \cdot \cos(\omega \cdot t - \Delta\varphi + \pi) = A_0 \cdot \cos(\omega \cdot t - \Delta\varphi) - A_0 \cdot \cos(\omega \cdot t - \Delta\varphi) = 0$$

die resultierende Amplitude wird also Null, was man als **destruktive Überlagerung** bezeichnet. Bei allen anderen Phasenwinkeln entsteht somit eine Amplitude zwischen diesen beiden Extrema.

2.4.3 Huygens'sches Prinzip

Erhöht man die Anzahl der Erregerzentren und ordnet man diese auf einer Linie an, so entsteht ein Wellensystem mit ebenfalls linearen Wellenfronten (siehe Abb. 24)., wobei sich zwischen den Wellenfronten die einzelnen Wellen gegenseitig auslöschten und nur an den Fronten eine konstruktive Überlagerung stattfindet.

Blendet man also aus einer solchen linearen Wellenfront einen einzelnen Punkt aus, so entsteht wieder ein kreisförmige Elementarwelle. Der holländische Physiker Christian Huygens formulierte diese Erkenntnis mit dem Satz: „Jeder Punkt einer Wellenfront ist Ausgangspunkt einer (kreisförmigen) Elementarwelle.“ Da sich die Welle anschließend nicht mehr nur in Richtung der ursprünglichen Wellenfront, sondern in alle Richtungen weiter ausbreitet, spricht man hier von **Beugung**. Nicht nur Spalte,

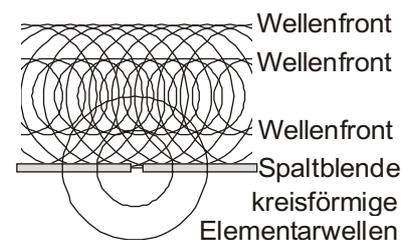


Abb. 24: Ausbildung einer linearen Wellenfront bei vielen linear angeordneten Erregerzentren und ausgeblendete Elementarwellen

sondern auch Kanten oder Hindernisse führen zur Beugung. Diese findet bei allen Wellenformen statt, seien es Wellen auf einer Wasseroberfläche oder Druckwellen in Gasen. Da auch das Licht Beugungserscheinungen zeigt, ist dies ein erstes Indiz dafür, dass auch das Licht ein sich als Welle ausbreitendes Phänomen ist.

2.5 Elektromagnetische Wellen

Eine besondere Art der Wellenausbreitung sind die elektromagnetischen Wellen, die immer dann entstehen, wenn sich eine Ladung bewegt.

In der Umgebung einer jeden Ladung existiert ein elektrisches Feld in Form eines Radialfeldes, das sich im gesamten Raum um die Ladung erstreckt. Legt man eine Ebene durch die Ladung, so gibt es einen Feldvektor, der in Richtung einer der Koordinatenachsen der Ebene liegt (in Abb. 25 hervorgehoben dargestellt).

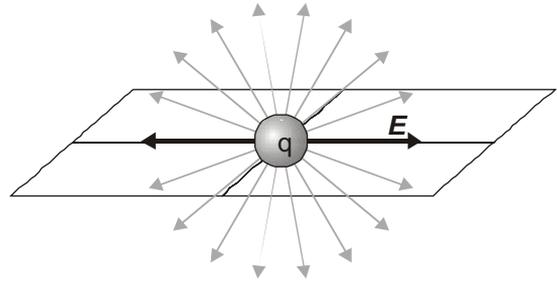


Abb. 25: Elektrisches Feld einer Ladung im Raum, hervorgehoben ist der Feldvektor in einer Richtung der Ebene

2.5.1 Felder einer bewegten Ladung

Wird die Ladung bewegt, so entsteht durch den Strom I zusätzlich zum elektrischen ein magnetisches Feld, dessen Feldlinien konzentrische Kreise in der Ebene senkrecht zur Bewegungsrichtung bilden (Abb. 26). Betrachtet man die drei hier auftretenden Vektoren, so bilden diese das schon bekannte Orthogonalsystem, d. h.: die Vektoren für I , E und B stehen jeweils senkrecht zueinander.

Entfernt man sich hinreichend weit vom Ort der Ladung, wird sich die Richtung des elektrischen Feldes bei einer Bewegung der Ladung nicht nennenswert verändern, sodass anhand des elektrischen Feldes allein keine Feststellung getroffen werden kann, ob sich die Ladung bewegt hat. Da aber bei Bewegung der Ladung (und nur dann) zusätzlich ein magnetisches Feld auftritt, lässt sich aus der Kombination beider Felder eine Information darüber treffen, dass sich eine Ladung bewegt haben muss.

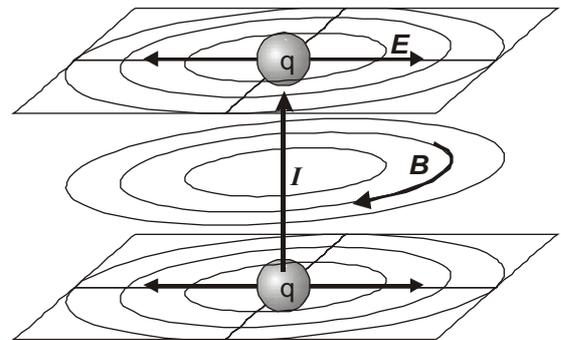


Abb. 26: Elektrisches und magnetisches Feld einer bewegten Ladung (elektrisches Feld nur innerhalb der Ebene und in einer Richtung gezeichnet)

2.5.2 Feld einer schwingenden Ladung

Versetzt man die Ladung in eine harmonische Schwingung, so entsteht ein sich ständig veränderndes magnetisches Feld. Eine Möglichkeit zur Erzeugung einer solchen Schwingung ist das Anlegen einer sinusförmigen Wechselspannung an einen gestreckten Leiter (Dipol) wie in nebenstehender Skizze.

Die Wechselspannungsquelle z.B. lädt den oberen Teil des Dipols negativ und den unteren Teil positiv auf (linke Hälfte von Abb. 27). Nach einer halben Periode der Schwingung ist die Polarität der Ladung auf den Teilen des Dipols vertauscht. Aus größerer Entfernung entspricht dieser Vorgang der Bewegung zweier Ladungen $Q+$ und $Q-$, wobei der Betrag beider Ladungen zwischen Null und Q_{\max} wechselt (rechte Hälfte von Abb. 27). Fasst man die beiden Teile des Dipols als einen Kondensator auf, so gilt für die Feldstärke zwischen den „Platten“ des Kondensators in Abhängigkeit von der Spannung $U(t)$ der Wechselspannungsquelle

$$E(t) = \frac{U(t)}{d} = Q(t) \cdot \frac{C}{d} \quad (107)$$

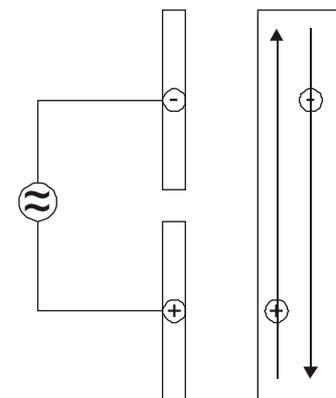


Abb. 27: Erzeugen einer harmonischen Schwingung in einem Leiter

Das daraus resultierende Feld in hinreichend großer Entfernung ergibt sich aus der Überlagerung der beiden Felder von $Q+$

und Q - und nimmt den in Abb. 28 (oben) gezeigten Verlauf. Wenn die elektrische Feldstärke ein Maximum erreicht hat, sind die Ladungen in Ruhe, bei einem Nulldurchgang der Feldstärke haben die Ladungen die größte Geschwindigkeit, denn es gilt

$$I(t) = \dot{Q}(t) \quad (108)$$

d.h. bei einer harmonischen Anregung weist der Strom dann ein Maximum auf und somit auch die magnetische Feldstärke, die somit den in Abb. 28 (unten) gezeigten Verlauf zeigt.

Die Momentanamplituden des elektrischen und des magnetischen Feldes sind also gegeneinander um 90° phasenverschoben, außerdem stehen die Feldvektoren senkrecht aufeinander. Betrachtet man nun in einem beliebigen weit entfernten Raumpunkt die beiden Felder in ihrer räumlichen Anordnung in Abhängigkeit von der Zeit, so ergibt sich eine Darstellung wie in Abb. 29 wiedergegeben. Da elektrisches und magnetisches Feld bei ihrer Ausbreitung als Welle untrennbar miteinander verbunden sind, spricht man von einer **elektromagnetischen Welle**.

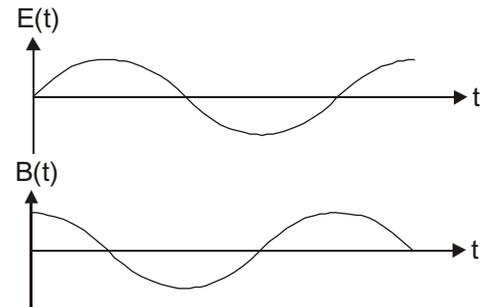


Abb. 28: Verlauf des elektrischen (oben) und des magnetischen Feldes bei harmonischer Anregung

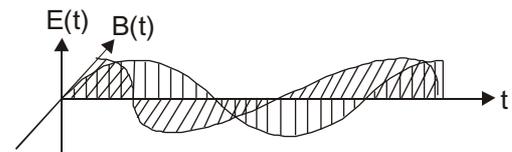


Abb. 29: Räumliche und zeitliche Darstellung des elektromagnetischen Feldes

2.5.3 Licht als elektromagnetische Welle

Ohne näher auf die tiefere Problematik einzugehen, soll an dieser Stelle kurz auf die Entstehung von Licht eingegangen werden. Gemäß einer stark vereinfachten Vorstellung kreist ein Elektron auf einer bestimmten Bahn um den Atomkern. Auf dieser Bahn besitzt es eine definierte Energie, da es sich im Coulombfeld des Kerns bewegt und deshalb auf seiner Kreisbahn eine bestimmte Geschwindigkeit haben muss. Wird es von dieser Bahn auf eine weiter entfernte Bahn „gehoben“, muss dem Elektron Energie zugeführt werden. Kehrt es von dieser Bahn auf die vorherige zurück, gibt es diese Energie in Form von Licht wieder ab. Da es sich dazu bewegen muss, entsteht ein elektromagnetischer Impuls, der sich als elektromagnetische Welle im Raum ausbreitet.

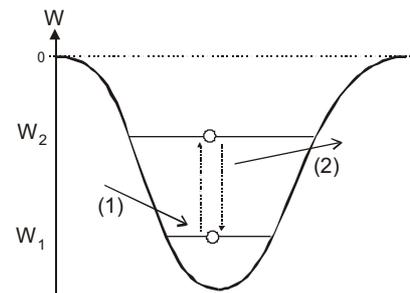


Abb. 30: Anregung (1) und Emission von Licht (2) bei einem Atom

2.6 Beugung und Interferenz

Nach dem Huygens'schen Prinzip breiten sich hinter einer Spaltöffnung, die von einer Wellenfront getroffen wird, kreisförmige Elementarwellen aus. Gibt es mehr als eine Spaltöffnung, so entstehen mehrere Wellensysteme, die sich gegenseitig überlagern. Betrachtet man die Amplitude der Wellen an einem beliebigen Punkt in hinreichend großem Abstand von den Spaltöffnungen, so kann für diesen Punkt aufgrund der bekannten Abstände zu den Spaltöffnungen angegeben werden, in welcher Weise sich die einzelnen Wellenamplituden überlagern, insbesondere, ob eine destruktive oder eine konstruktive Überlagerung stattfindet. Die Überlagerung zweier oder mehrerer Wellensysteme an einem Punkt bezeichnet man als **Interferenz**, analog spricht man von destruktiver und konstruktiver Interferenz. Grundsätzlich gelten die weiteren Überlegungen für alle Formen von Wellen, im Folgenden wird zur Vereinfachung der Sprechweise jedoch von Lichtwellen ausgegangen.

2.6.1 Beugung und Interferenz am Doppelspalt

Das am einfachsten zu behandelnde Beugungssystem ist ein Doppelspalt (vergl. Abb. 31). Die charakteristische Größe eines Doppelspaltes ist der Spaltabstand d , der üblicherweise von Spaltmitte zu Spaltmitte gemessen wird. Die Breite der Spalte ist zunächst ohne Belang.

Das Licht der an den Spaltöffnungen entstehenden Wellensysteme falle auf einen Schirm. Je nach Phasenlage der auf den einzelnen Punkten des Schirms eintreffenden Wellen entstehen dort Orte,

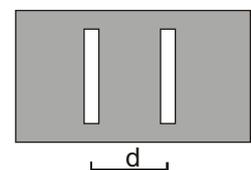


Abb. 31: Doppelspalt

an den destruktive Interferenz (Dunkelheit) eintritt und solche, an denen konstruktive Interferenz (Helligkeit) zu beobachten ist.

Zur Analyse der zu erwartenden Überlagerung verwendet man hier nicht die Wellenfronten, sondern betrachtet stattdessen die Wegstrecken, die die Wellen von den Spaltöffnungen zurückgelegt haben. In Abb. 32 sind die Lichtwege von den beiden Spalten bis zum Punkt P eingezeichnet. Aus geometrischen Überlegungen erhält man

$$s_1 = \sqrt{\ell^2 + \left(a - \frac{d}{2}\right)^2} \quad \text{und} \quad s_2 = \sqrt{\ell^2 + \left(a + \frac{d}{2}\right)^2}$$

Um festzustellen, welche Form der Interferenz vorliegt, muss die Differenz dieser beiden Terme bestimmt werden. Ist diese ein ganzzahliges Vielfaches der Wellenlänge λ , so erhält man konstruktive Interferenz, unterscheiden sie sich innerhalb einer Periode um eine halbe Wellenlänge, so erhält man destruktive Interferenz. Für konstruktive Interferenz muss also gelten:

$$\Delta s = (s_2 - s_1) = n \cdot \lambda \quad (109)$$

Um zu erfahren, ob an einem Punkt im Abstand a von der optischen Achse konstruktive Interferenz auftritt, müssen also der Schirmabstand ℓ , der Spaltabstand d und die Wellenlänge λ bekannt sein. Durch Einsetzen der gegebenen Größen und Auflösen nach n

$$n = \frac{1}{\lambda} \cdot \left(\sqrt{\ell^2 + \left(a + \frac{d}{2}\right)^2} - \sqrt{\ell^2 + \left(a - \frac{d}{2}\right)^2} \right) \quad (110)$$

lässt sich nun feststellen, ob n eine natürliche Zahl ist - wenn nicht, liegt keine konstruktive Interferenz vor. Möchte man dagegen erfahren, in welchem Abstand a zum ersten Mal konstruktive Interferenz zu beobachten sein wird, ist die Gleichung (106) nach a aufzulösen. Man wird allerdings schnell feststellen, dass die dazu notwendigen Umformungsschritte sich als recht umfangreich erweisen, weswegen an dieser Stelle darauf verzichtet werden soll.

Der Lösungsweg vereinfacht sich jedoch drastisch, wenn man davon ausgeht, dass der Schirmabstand ℓ sehr groß gegenüber dem Spaltabstand d ist. Wie man aus Abb. 32 entnehmen kann, verlaufen dann die beiden Lichtwege s_1 und s_2 zunehmend parallel. Mit $\ell \gg d$ bietet sich dann die Näherung $s_1 \parallel s_2$ an, wie in Abb. 33a gezeigt. Beide Lichtwege schließen nun mit der optischen Achse den Winkel φ ein. Dieser Winkel findet sich aus geometrischen Überlegungen auch in dem Dreieck wieder, das aus der Strecke Δs , dem Abstand der beiden Spalte d und der Senkrechten auf s_1 und s_2 gebildet wird. Damit erhält man

$$\Delta s = d \cdot \sin(\varphi) \quad (111)$$

Betrachtet man nun den Lichtweg zum Schirm, so fallen die beiden Lichtwege s_1 und s_2 zusammen, da d sehr klein gegenüber ℓ ist. Nach Abb. 33b gilt nun

$$\tan(\varphi) = \frac{a}{\ell} \quad (112)$$

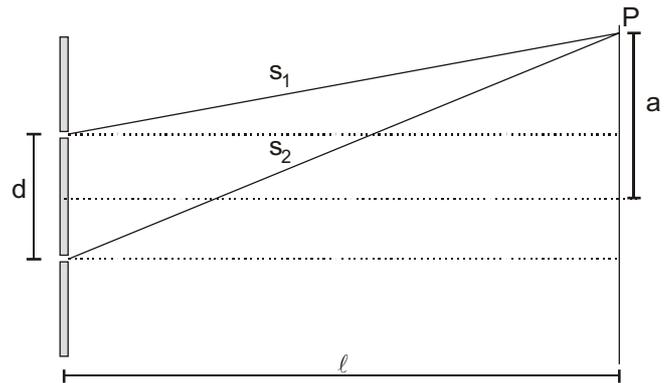


Abb. 32: Geometrie des Strahlverlaufs beim Doppelspalt

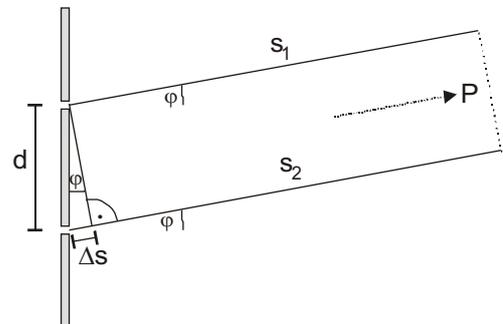


Abb. 33a: Parallele Lichtwege bei sehr weit entferntem Schirm

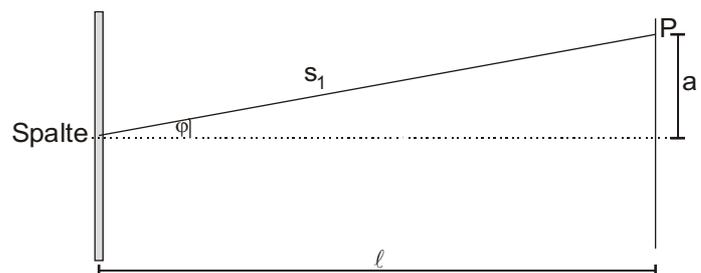


Abb. 33b: Lichtweg von den Spalten zum Schirm

Daraus erhält man für den Winkel φ den Ausdruck

$$\varphi = \arctan\left(\frac{a}{\ell}\right) \quad (113)$$

Setzt man diesen Ausdruck in (107) ein, so erhält man

$$\Delta s = d \cdot \sin\left(\arctan\left(\frac{a}{\ell}\right)\right) \quad (114)$$

Nach Glg. (109) und (111) tritt konstruktive Interferenz bei einem bestimmten Winkel φ_n ein, wenn die Bedingung

$$d \cdot \sin(\varphi_n) = n \cdot \lambda$$

erfüllt ist, wobei n eine natürliche Zahl ist, die als die **Ordnung** der Interferenz bezeichnet wird. Um bei gegebener Wellenlänge λ , Spaltabstand d und Schirmabstand ℓ den Ort des n -ten Auftretens konstruktiver Interferenz zu erhalten, löst man Gleichung (112) nach a auf und erhält mit der Umkehrfunktion des Sinus aus Glg. (114)

$$a_n = \ell \cdot \tan\left(\arcsin\left(\frac{n \cdot \lambda}{d}\right)\right) \quad (115)$$

Umgekehrt lässt sich damit die Wellenlänge λ bestimmen, wenn man den Spaltabstand d , den Abstand a_n des n -ten Maximums von der optischen Achse und den Abstand ℓ zwischen Schirm und Spalt kennt. Es gilt

$$\lambda = \frac{d}{n} \cdot \sin\left(\arctan\left(\frac{a}{\ell}\right)\right) \quad (116)$$

2.6.2 Beugung und Interferenz am Gitter

Vergrößert man die Anzahl der Spalte, bezeichnet man ein solches System von Mehrfach-Spalten wird als **Gitter**. Da hier nun mehrere Wellensystem zur Überlagerung gebracht werden müssen, gelten zwar die gleichen Überlegungen wie beim Doppelspalt, allerdings müssen nun alle Spalten paarweise zur Beerchnung herangezogen werden, um die Art der auftretenden Interferenz festzustellen, was den Bearbeitungsaufwand erheblich erhöht. Zur Vereinfachung helfen hier einige Überlegungen zu besonderen Fällen weiter, die beobachtbaren Phänomene zu erläutern.

Zunächst betrachte man ein beliebiges Paar benachbarter Spalte, die auf einem Schirm in einem bestimmten Abstand a ein konstruktives Interferenzmaximum 1. Ordnung ($n = 1$) erzeugen. Damit entspricht der Gangunterschied zwischen den beiden Lichtwegen genau der Wellenlänge λ . Dies trifft für alle benachbarten Gitterspalte zu (Abb. 34, links).

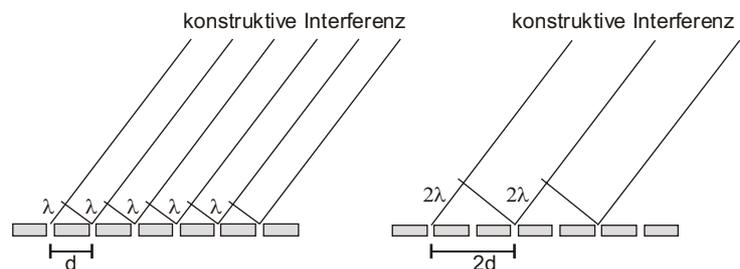


Abb. 34: Weglängenunterschiede beim Gitter für konstruktive Interferenz

Zunächst betrachte man ein beliebiges Paar benachbarter Spalte, die auf einem Schirm in einem bestimmten Abstand a ein konstruktives Interferenzmaximum 1. Ordnung ($n = 1$) erzeugen. Damit entspricht der Gangunterschied zwischen den beiden Lichtwegen genau der Wellenlänge λ . Dies trifft für alle benachbarten Gitterspalte zu (Abb. 34, links).

Betrachtet man nun jeden zweiten Gitterspalt, beträgt der Gangunterschied $2 \cdot \lambda$. Auch hier findet also wieder eine konstruktive Überlagerung der Lichtstrahlen statt (Abb. 34, rechts). Analog findet man auch für jeden 3., 4. Spalt usw. immer konstruktive Überlagerung. In jedem Fall tragen also alle Gitterspalte in beliebiger Entfernung zur konstruktiven Interferenz bei, was dazu führt, dass die Lichtintensität am Ort des Maximums auf dem Schirm erheblich höher ist als bei einem einzelnen Doppelspalt.

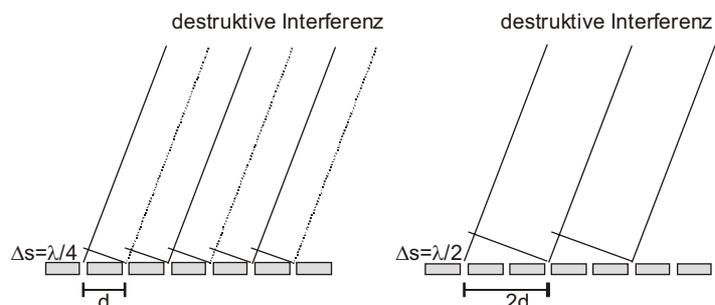


Abb. 35: Weglängenunterschiede beim Gitter für destruktive Interferenz

Nun betrachtet man den Fall, dass der Weglängenunterschied zweier benachbarter Spalte kein ganzzahliges Vielfaches der Wellenlänge ist. Wenn die Bedingung

$$\Delta s = \frac{\lambda}{2} \cdot (2n - 1) \quad (117)$$

erfüllt ist, erfolgt destruktive Interferenz (Auslöschung). Beträgt nun wie in Abb. 35 dargestellt der Weglängenunterschied $\Delta s_2 = \lambda / 4$, so löschen sich jeweils die Strahlen der Spalte m und $m + 2$ aus, da hier nun der Weglängenunterschied $\lambda / 2$ beträgt. Analog findet man auch für jeden anderen Weglängenunterschied Δs_x zweier benachbarter Spalte zu jedem Spalt m einen anderen Spalt $m + x$, bei dem der Weglängenunterschied die Bedingung für destruktive Interferenz erfüllt.

Abb. 36 zeigt den Intensitätsverlauf eines Gitters mit 5, 8 und sehr vielen Spalten. Wie man sieht, werden die Orte konstruktiver Interferenz immer schärfer, während in den Bereichen dazwischen die Auslöschung immer kleiner werdende Zwischenmaxima zeigt. Ein Gitter mit mehr als 100 Spalten weist zwischen den Intensitätsmaxima praktisch keine Resthelligkeit mehr auf.

Wie beim Doppelspalt ist die Interferenzbedingung für konstruktive Interferenz erfüllt nach der Gleichung

$$\sin(\varphi_n) = \frac{n \cdot \lambda}{d} \quad (118)$$

Statt des Spaltabstandes d wird häufig auch die **Gitterkonstante** g verwendet, die angibt, wieviele Spalte pro Längeneinheit das Gitter aufweist (z.B. $g = 560 \text{ mm}^{-1}$). Es gilt

$$d = \frac{1}{g} \Rightarrow \sin(\varphi_n) = n \cdot \lambda \cdot g \quad (119)$$

2.7 Anwendungsbeispiele zu Wellen

2.7.1 Schallwellen

Ein Lautsprecher strahlt eine sinusförmige Schallwelle mit der Frequenz $f = 440 \text{ Hz}$ (Kammerton „a“) aus. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Schall in Luft beträgt 340 m/s . Welche Wellenlänge hat die Schallwelle?

Nach 2.3.1 gilt für die Wellenlänge

$$\lambda = v_c \cdot T \quad (88)$$

und für die Periodendauer nach 1.4.5.1

$$T = \frac{1}{f} \quad (31)$$

Einsetzen der Zahlenwerte liefert

$$\lambda = v_c \cdot \frac{1}{f} = 340 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \frac{1}{440 \text{ s}^{-1}} = 0,773 \text{ m}$$

Zwei Hochtonlautsprecher haben den Abstand $d = 0,2 \text{ m}$. Sie werden phasengleich mit einer Frequenz $f = 3 \text{ kHz}$ angeregt. Bewegt man sich auf einer Linie im Abstand $\ell = 5 \text{ m}$ parallel zur Verbindungslinie der beiden Lautsprecher, schwankt die wahrgenommene Lautstärke. In welchem Abstand von der Symmetrieachse findet man das 1. Maximum? Wieviele Maxima gibt es?

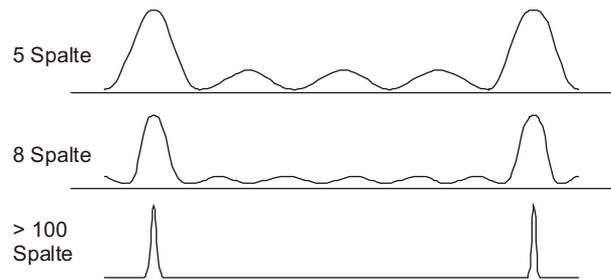


Abb. 36: Intensitätsverlauf bei Gittern mit unterschiedlicher Spaltanzahl

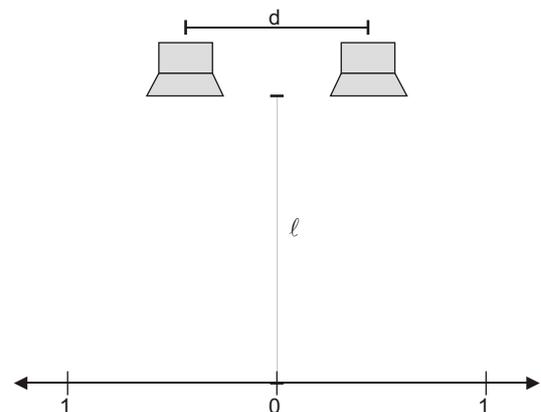


Abb. 37: Anordnung der Hochtonlautsprecher

Abb. 37 zeigt zur Verdeutlichung (nicht maßstabsgerecht) die Anordnung. Die Wellenlänge erhält man nach Glg. (31) und (88) aus der Frequenz zu

$$\lambda = \frac{v_c}{f} = \frac{340 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{3 \cdot 10^3 \text{s}^{-1}} = 0,113 \text{m}$$

Die Bedingung $l \gg d$ ist hier noch annähernd erfüllt, somit kann der Lösungsansatz nach Glg. (115) verwendet werden. Damit erhält man für das 1. Maximum

$$a_1 = \ell \cdot \tan\left(\arcsin\left(\frac{n \cdot \lambda}{d}\right)\right) = a_n = 5 \text{m} \cdot \tan\left(\arcsin\left(\frac{1 \cdot 0,113 \text{m}}{0,2 \text{m}}\right)\right) = 3,42 \text{m}$$

Aus Symmetriegründen findet man dieses Maximum auf beiden Seiten des Ortes des 0. Maximums. Zur Anzahl der möglichen Maxima ist n zu bestimmen. Da der Winkel nicht größer sein kann als 90° , muss nach Glg. (119) gelten:

$$\sin(\varphi_n) = \frac{n \cdot \lambda}{d} \Rightarrow n = \frac{d}{\lambda} \cdot \sin(\varphi) \Rightarrow n < \frac{d}{\lambda} \cdot \sin(90^\circ) \Rightarrow n < \frac{d}{\lambda}$$

Durch Einsetzen der Zahlenwerte erhält man

$$n < \frac{0,2 \text{m}}{0,113 \text{m}} = 1,77$$

Bereits für $n = 2$ erhält man kein weiteres Maximum, also ist das an der Stelle $a_1 = 3,42 \text{ m}$ berechnete Maximum das einzige. Werden die beiden Lautsprecher weiter voneinander entfernt, erhöht sich die mögliche Anzahl der Maxima, außerdem rücken diese enger zusammen. Bei einem Abstand von 3 m (empfohlener Aufstellungsabstand) erhält man

$$a_1 = 0,19 \text{ m}, a_2 = 0,388 \text{ m}, a_3 = 0,583 \text{ m usw. ,}$$

insgesamt findet man 26 Maxima auf jeder Seite (was nebenbei bemerkt für das Richtungshören bei Stereo notwendig ist).

2.7.2 DCF-Zeitzeichensignal

Die PTB Braunschweig (Physikalisch-Technische Bundesanstalt) sendet auf der Frequenz $67,5 \text{ kHz}$ ein Zeitzeichensignal aus, das von einer Atomuhr gesteuert wird. Dieses Signal wird von DCF-Empfängern („Funkuhren“) empfangen, dekodiert und zur Zeitanzeige benutzt. Wie groß ist die Phasenverschiebung zwischen Sender und Empfänger, wenn letzterer 800 km vom Sender entfernt ist?

Mit obigen Angaben erhält man für die Kreisfrequenz des Senders als Erreger der ausgesandten Welle

$$\omega = 2\pi \cdot f = 4,241 \cdot 10^5 \text{ s}^{-1}$$

Damit lautet die Schwingungsgleichung des Senders

$$A_S(t) = A_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

Der Empfänger ist $s = 800 \text{ km}$ vom Sender entfernt, damit ist seine Schwingung um $\Delta\varphi$ phasenverschoben:

$$A_E(t) = A_0 \cdot \sin(\omega \cdot t - \Delta\varphi)$$

wobei nach Glg. (98) gilt:

$$\Delta\varphi = \omega \cdot \frac{s}{v_c}$$

Die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen erfolgt mit Lichtgeschwindigkeit, somit erhält man

$$\Delta\varphi = 4,241 \cdot 10^5 \text{ s}^{-1} \cdot \frac{8 \cdot 10^5 \text{ m}}{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}} = 1130,9333 = 179,99363 \cdot 2\pi$$

Da eine Phasenverschiebung um 2π Phasengleichheit bedeutet, trägt lediglich der Nachkomma-Anteil zu einer Phasenver-

schiebung bei, damit erhält man eine effektive Phasenverschiebung von

$$\Delta\varphi = 0,99363 \cdot 2\pi = 6,24316 = 357,7^\circ$$

Einen äquivalenten Lösungsweg bietet die allgemeine Wellengleichung nach Glg. (103). Setzt man $t = 0$, so betrachtet man mit $s = 0$ die Welle am Ort der Aussendung und erhält

$$A(0,0) = A_0 \cdot \cos\left(2\pi \cdot \left(\frac{0}{T} - \frac{0}{\lambda}\right)\right)$$

Mit $s = 800$ km lautet die Wellengleichung am Ort des Empfängers zum gleichen Zeitpunkt

$$A(s,0) = A_0 \cdot \cos\left(2\pi \cdot \left(\frac{0}{T} - \frac{s}{\lambda}\right)\right)$$

Die Phasenverschiebung ergibt sich also zu

$$\Delta\varphi = 2\pi \cdot \frac{s}{\lambda} \quad (120)$$

Die Wellenlänge erhält man zu

$$\lambda = \frac{v_c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m}}{67,5 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}} = 4,44 \cdot 10^3 \text{ m}$$

Eingesetzt in Glg. (129) erhält man

$$\Delta\varphi = 2\pi \cdot \frac{800 \cdot 10^3 \text{ m}}{4,44 \cdot 10^3 \text{ m}} = 11309,9735 = 180 \cdot 2\pi$$

Demnach wäre hier die Phasenverschiebung 0° (bzw. 360°) und stimmt damit nahezu mit der vorher auf anderem Wege berechneten überein (die Abweichungen ergeben sich aus Rundungsfehlern während der Rechnung).

2.7.3 Gitterspektrograph

Das rote Licht eines Lasers mit der Wellenlänge $\lambda = 635$ nm fällt durch ein Gitter mit der Gitterkonstanten $g = 560$ mm⁻¹ auf einen Schirm, der in einem Abstand $\ell = 0,5$ m vom Gitter aufgestellt ist. Wieviele Ordnungen der Interferenzmaxima sind zu erkennen und in welchem Abstand vom 0. Maximum sind sie auf dem Schirm zu sehen? Welche Wellenlänge hat das Licht einer anderen Quelle, die ein sichtbares Maximum im Abstand von 0,45 m erzeugt?

Nach Glg. (115) gilt mit $g = 1 / d$

$$a_n = \ell \cdot \tan(\arcsin(n \cdot \lambda \cdot g))$$

Einsetzen der Zahlenwerte liefert für $n = 1$

$$a_1 = 0,5 \text{ m} \cdot \tan(\arcsin(1 \cdot 635 \cdot 10^{-9} \text{ m} \cdot 560 \cdot 10^3 \text{ m}^{-1})) = 0,190 \text{ m} \quad (\varphi_1 = 20,8^\circ)$$

Analog erhält man für $n = 2$ den Abstand des 2. Maximums zu $a_2 = 0,506$ m ($\varphi_2 = 45,3^\circ$), ein drittes Maximum existiert nicht mehr.

Um die Wellenlänge der unbekanntten Quelle zu bestimmen, ist Glg. (115) nach λ aufzulösen. Mit $\sin(\varphi_n) = n \cdot \lambda \cdot g$ und

$\varphi_n = \arctan\left(\frac{a_n}{\ell}\right)$ erhält man aus

$$\lambda = \frac{1}{n \cdot g} \cdot \sin\left(\arctan\left(\frac{a_n}{\ell}\right)\right)$$

für $n = 1$ die Wellenlänge 1149 nm und für $n = 2$ die Wellenlänge 597 nm. Da das Licht sichtbar ist, beträgt die Wellenlänge 597 nm und ist einem Maximum 2. Ordnung zuzuordnen.

Index

A

abgeschlossenes System 3
Abnahme der Amplitude 16
Allgemeine Wellengleichung 20, 22
Amplitude 15
Anfangsbeschleunigung 5
Anfangsenergie 16
Anfangszustand 5
Ausbreitung einer Druckwelle 21
Ausbreitung einer Welle 22
Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Welle 20
Auslenkung 10

B

Bestimmung der Federkonstanten 14
Beugung 23
Beugung und Interferenz 25
Beugung und Interferenz am Doppelspalt 25
Beugung und Interferenz am Gitter 27
Beugungserscheinungen 24
Bewegungsablauf 15
Bewegungsgleichung 8
Bogenlänge 10

C

Cosinusfunktion 8
Coulombfeld 25

D

Dämpfungskonstante 16
DCF-Zeitzeichensignal 29
destruktive Überlagerung 23
Dichte der Flüssigkeit 13
Differenzialgleichung 6
Dipol 24
Doppelspalt 25
Drehschwingung 19
Druckwelle 20

E

Ebene Wellen 22
Eigenfrequenz 17
elastische Verformung 4
elektrischer Schwingkreis 17
elektrisches Feld 17
Elektromagnetische Wellen 24
Elementarwelle 23
Energiebilanz 15
Energieerhaltungssatz 3
Energietransport 19
Energieverlust 16
Energiezufuhr 16
Erregerfrequenz 17
Erregerzentren 23
erzwungene Schwingung 16
Exponentialfunktionen 7

F

Fadenmasse 12
Fadenpendel 10
Feder-Masse-System 4
Federkonstante 4
Feld einer schwingenden Ladung 24
Felder einer bewegten Ladung 24
Feldvektor 24
Flüssigkeitssäule 3, 12
Frequenz 8

G

Gangunterschied 27
gedämpfte Schwingung 16
gekoppelte Pendel 19
Gesamtenergie 4
Geschwindigkeit des Energietransports 20
Geschwindigkeit im Nulldurchgang 12
Gewichtskraft 10
Gitter 27
Gitterkonstante 28
Gitterspalt 27
Gitterspektrograph 30
Grundgleichung der Mechanik 3

H

harmonische Anregung 25
Hertz 8
homogene Differenzialgleichung 7
Hooksches Gesetz 4
Huygens 23
Huygens'sches Prinzip 23

I

imaginäre Zahlen 9
Induktionsgesetz 17
Induktivität 17
Intensitätsverlauf eines Gitters 28
Interferenz 25
Interferenzbedingung 28

K

Kinematik 3
kinetische Energie 3
kinetische Energie im Nulldurchgang 12
kleine Pendelausschläge 12
komplexe Zahlen 9
Kondensator 17
konstruktive Überlagerung 23
Kräfteparallelogramm 10
Kraftübertragung 19
Kreisfrequenz 8
Kreiswellen 22

L

Laser 30
Licht als elektromagnetische Welle 25
Lichtgeschwindigkeit 29
Lichtintensität 27
Lichtweg 26
Lineare Wellen 22
lineare Wellenfront 23
Lösen einer Differenzialgleichung 7
Lösungsansatz 7
Luftreibung 12

M

magnetisches Feld 17, 24
mittlere Geschwindigkeit 6
mks-System 8
Momentangeschwindigkeit 6

N

Näherung 26
Näherungen 10
Nulldurchgang 5

O

Ordnung 27
Orthogonalsystem 24
Oszillator 19
Oszillatorkette 19
Oszilloskop 17

P

Pendelbewegung 12
Pendelmasse 12
Periode 8
Periodendauer 3, 8
periodisch 3
Phasenabstand 17
Phasenbeziehung 17
Phasenverschiebung 21
Phasenwinkel 21
potenzielle Energie 4
Punktförmige Anregung 22

R

Radialfeld 24
Randbedingung 8
Räumliche Wellen 22
reelle Komponente 9
Reibungskoeffizient 16
Reibungsverluste 16
Resonanzkatastrophe 17
Resonanzpeak 17
Resonanzüberhöhung 17
rückstellende Kraft 10
Ruhelage 5

S

Schallwellen 28
Schallwellen in Festkörpern 21
Schallwellen in Luft 20
Schaukel 16
Schirmabstand 26
Schwingungsgleichung 9
Spaltabstand 25
Spaltöffnung 25
Spannung an einem Kondensator 17
Spannung an einer Spule 17
Spule 17
Superpositionsprinzip 23

T

Torsionspendel 19
Trägheit der Masse 5
Trägheitsgesetz 6
Trägheitskraft 6
trigonometrische Funktionen 7

U

U-Rohr-Schwingung 12
Überlagerung von Wellen 23
Uhrenpendel 3
ungedämpfte Schwingung 15

W

Wasseroberfläche 22
Wegstrecke 26
Wellen 19
Wellen auf einer Wasseroberfläche 20
Wellenausbreitung bei periodischer Anregung 21
Wellenfront 23, 25
Wellengleichung 21
Wellengleichung in Abhängigkeit vom Ort 22
Wellengleichung in Abhängigkeit von der Zeit 21
Wellenlänge 21
Wellensystem 22

Z

Zwischenmaxima 28