

Felder

ein unterrichtsbegleitendes Scriptum

Inhaltsverzeichnis

1	Der Feldbegriff	3
1.1	Felderzeugende Größe	3
1.2	Feldlinien	3
1.3	Feldarten	3
1.3.1	Radialfeld	3
1.3.2	Homogenes Feld	4
1.3.3	Konzentrisches Feld	4
2	Das Gravitationsfeld	4
2.1	Ortsfaktor im homogenen Gravitationsfeld	4
2.2	Radiales Gravitationsfeld	4
2.3	Berechnungsbeispiele	5
2.3.1	Fallbeschleunigung auf der Erdoberfläche	5
2.3.2	Gravitationsfeldstärke im Mondabstand	5
2.4	Überlagerung von Gravitationsfeldern	6
2.5	Körper im Gravitationsfeld	7
2.5.1	Hubarbeit im homogenen Gravitationsfeld	7
2.5.2	Hubarbeit im radialen Gravitationsfeld	7
2.5.3	Das Potenzial eines Gravitationsfeldes	8
2.5.4	Graphische Darstellung	9
2.6	Berechnungsbeispiele	9
2.6.1	Berechnung der Hubarbeit	9
2.6.2	Potenzielle Energie eines Körpers	10
2.6.3	Potenziale im Gravitationsfeld der Erde	10
2.7	Bewegung eines Körpers im Gravitationsfeld	11
3	Das elektrische Feld	12
3.1	Ladungen auf metallischen Leitern	12
3.1.1	Ladungsverteilung auf einer Kugel	12
3.1.2	Ladungsverteilung auf einer ebenen Platte	12
3.1.3	Ladungsverteilung zwischen zwei planparallelen Platten	12
3.2	Kraftwirkung im elektrischen Feld	13
3.2.1	Arbeit im elektrischen Feld	13
3.2.2	Spannung und elektrisches Feld	14
3.3	Ladung und elektrisches Feld	14
3.3.1	Kapazität eines Plattenkondensators	15
3.3.2	Elektrische Feldstärke einer Punktladung	15
3.4	Berechnungsbeispiele	16
3.4.1	Aufladung eines Plattenkondensators	16
3.4.2	Aufladung einer Kugel	16
3.4.3	Abstoßung zwischen zwei gleich geladenen Kugeln	17
3.5	Auf- und Entladung eines Kondensators	18
3.5.1	Iterative Berechnung der Aufladung	18
3.5.2	Iterative Berechnung der Entladung	19
3.5.3	Analytische Berechnung der Entladung	19
3.5.4	Analytische Berechnung der Aufladung eines Kondensators	21
3.6	Berechnungsbeispiele	21
3.6.1	Aufladung eines Kondensators	21
4	Das magnetisches Feld	22
4.1	Betrag und Richtung der wirkenden Kraft	22
4.2	Lorentz-Kraft auf bewegte Ladungen	22
4.2.1	Der Hall-Effekt zur Magnetfeldmessung	23
4.2.2	Driftgeschwindigkeit und Stromstärke beim Hall-Effekt	24
4.3	Magnetfeld stromdurchflossener Leiter	24
4.3.1	Magnetfeld eines gestreckten Leiters	24
4.3.2	Magnetfeld einer langen Spule	25
4.4	Teilchen in Feldern	26
4.4.1	Erzeugung freier Elektronen	26
4.4.2	Beschleunigung von Elektronen	26
4.4.3	Elektrostatische Ablenkung von Elektronen	27
4.4.4	Magnetische Ablenkung von Elektronen	27
4.4.5	Das Wiensche Geschwindigkeitsfilter	28

1 Der Feldbegriff

Zahlreiche Phänomene in der Physik beruhen auf der Wechselwirkung zwischen Objekten: zwischen Ladungen oder Massen wirken Kräfte und bewegte Ladungen werden im magnetischen Feld abgelenkt. Die Kraft als vektorielle Größe ist dabei erst vollständig durch Betrag, Richtung und Angriffspunkt beschrieben. Damit auf ein Objekt eine Kraft wirken kann, muss es ein anderes Objekt geben, was für diese Kraft ursächlich ist. Dieses Objekt verändert den umgebenden Raum in dem Sinne, dass er auf andere Objekte eine Wirkung ausübt, die als Kraft in Erscheinung tritt. Die Auswirkung dieser Veränderung wird allgemein als **Feld** beschrieben, im Sprachgebrauch findet sich häufig auch der Ausdruck Kraftfeld, der beinhaltet, dass hier eine Kraft ausgeübt werden kann. Die Verwendung des Konjunktivs ist deshalb wichtig, weil die Existenz des Feldes allein noch nicht zum Auftreten einer Kraft führt, dazu muss erst ein geeigneter Probekörper in das Feld verbracht werden.

1.1 Felderzeugende Größe

Die klassische Physik unterscheidet drei verschiedene Felder in Abhängigkeit von der Art der Eigenschaft, die für das Auftreten einer Kraft verantwortlich ist. Diese Eigenschaft bezeichnet man als **felderzeugende Größe**. Diese Größe legt gleichzeitig die Eigenschaft fest, die ein Objekt haben muss, damit darauf eine Kraft ausgeübt werden kann. Zur Unterscheidung von der felderzeugenden Größe bezeichnet man dieses Objekt als Probekörper.

<i>Name des Feldes</i>	<i>Felderzeugende Größe / Probekörper</i>	<i>Feld-Symbol</i>
elektrisches Feld	Ladung	E
magnetisches Feld	bewegte Ladung	B
Gravitationsfeld	Masse	G

1.2 Feldlinien

Bringt man einen Probekörper in ein Feld, so wirkt eine Kraft. Betrag und Richtung dieser Kraft hängen vom Ort ab, an dem sich der Probekörper befindet. Um den Verlauf eines Feldes in der Umgebung einer felderzeugenden Größe graphisch darzustellen, verwendet man Feldlinien. Die Tangente an eine Feldlinie gibt die Richtung der Kraft an. Die Stärke des Feldes an einem Ort wird durch die Feldliniendichte bestimmt, dabei wirkt das Feld natürlich auch zwischen den Feldlinien - in diesem Fall müssen Betrag und Richtung aus den benachbarten Feldlinien interpoliert werden. Die Richtung der Kraft wird durch Pfeile längs der Feldlinien veranschaulicht, deren Richtung durch die felderzeugende Größe bestimmt wird. Da die räumliche Darstellung von Feldern naturgemäß recht schwierig ist, wird häufig lediglich ein repräsentativer, ebener Ausschnitt aus dem Feld dargestellt.

1.3 Feldarten

Je nach Form des felderzeugenden Körpers können unterschiedliche Feldlinienverläufe entstehen. In einigen Fällen kann der Verlauf durch entsprechende Überlegungen vorhergesagt werden, häufig ist jedoch eine experimentelle Bestimmung oder eine aufwändige Berechnung nötig.

1.3.1 Radialfeld

Der einfachste Fall eines Feldes entsteht bei einer punktförmigen felderzeugenden Größe, z.B. einer Ladung oder einer (in einem Punkt konzentriert zu denkenden) Masse.

Da sich zwei Massen grundsätzlich anziehen, besteht das Feld einer punktförmigen Masse aus radial verlaufenden Feldlinien, die in Richtung des Massenmittelpunktes orientiert sind. In der Regel wird der felderzeugenden Größe eine endliche Ausdehnung gegeben und diese als Kugel (bzw. als Kreis) dargestellt. Dann enden die Feldlinien auf der Oberfläche (dem Kreisrand) der felderzeugenden Größe (siehe Abb. 1.1).

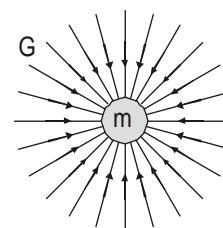


Abb. 1.1: Radialfeld einer Masse m

1.3.2 Homogenes Feld

Ein Sonderfall ergibt sich, wenn man einen kleinen Raumausschnitt des Radialfeldes betrachtet, z.B. unmittelbar über der Oberfläche der endlich großen felderzeugenden Größe. In erster Näherung verlaufen in einem solchen Ausschnitt die Feldlinien parallel, was bedeutet, dass an jedem Punkt innerhalb dieses Feldausschnittes die Kraftwirkung auf einen Probekörper gleich ist (vergl. Abb. 1.2). Diesen Fall findet man z.B. auf der Erdoberfläche in einem sog. *Labor-system*. Ein solches Feld bezeichnet man als **homogen** (soviel wie „gleichartig“).

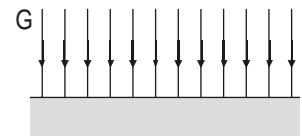


Abb. 1.2: Homogenes Feld in einem Laborsystem

1.3.3 Konzentrisches Feld

Einen weiteren Sonderfall stellt das magnetische Feld eines gestreckten stromdurchflossenen Leiters dar. Die Feldlinien bilden hier konzentrische Kreise um den Leitermittelpunkt (vergl. Abb. 1.3). Die Richtung der Feldlinien ergibt sich aus der Richtung des Stromflusses im Leiter. Eine Kompassnadel, die in die Nähe des Leiters gebracht würde, richtet sich tangential zu den Feldlinien aus. Die Kraftwirkung auf die Nadel ist umso geringer, je weiter die Nadel vom Leiter entfernt wird.

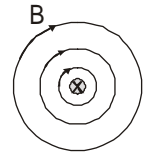


Abb. 1.3: Konzentrische Feldlinien um einen Leiter

2 Das Gravitationsfeld

Die Massenanziehung zwischen zwei Massen ist verantwortlich für die Tatsache, dass jeder Körper auf der Erde eine Gewichtskraft erfährt. Dabei ist die Masse der Erde die felderzeugende Größe und die Masse des Körpers die eines Probekörpers im Gravitationsfeld. Zur Unterscheidung wird die Masse der Erde häufig mit M und die des Probekörpers mit m bezeichnet. Zur Beschreibung des Gravitationsfeldes ist die Größe der Probemasse in der Regel nicht relevant, sofern sie klein ist gegenüber der erzeugenden Masse.

2.1 Ortsfaktor im homogenen Gravitationsfeld

Im Laborsystem auf der Erde erfährt eine Probemasse m eine Kraft in Richtung des Erdmittelpunkts, die als Gewichtskraft F_g bezeichnet wird. Zunächst als Ortsfaktor eingeführt, erlaubt g die Berechnung der Gewichtskraft über

$$F_g = m \cdot g \quad (2.1)$$

Im Zuge der Behandlung der Kinematik wird dieser - auf der schweren Masse beruhende - Ortsfaktor g als Fallbeschleunigung bezeichnet, was sich auf die Massenträgheit bezieht und durch eine andere Einheit hervorgehoben wird.

$$[g] = 1 \frac{\text{N}}{\text{kg}} = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Tatsächlich ist g jedoch ein Faktor, der ein Maß für die Kraft ist, die im Gravitationsfeld auf eine Probemasse ausgeübt wird. Dieser Faktor wird als Feldstärke bezeichnet, wobei g die Gravitationsfeldstärke im Laborsystem auf der Erdoberfläche beschreibt. Allgemein wird das Gravitationsfeld mit dem Großbuchstaben G bezeichnet, wobei gilt:

$$g = G(r_0) \quad (2.2)$$

wobei r_0 der Abstand der Laborsystems vom Erdmittelpunkt (und dem gedachten Massepunkt der Erde) ist. Solange die Probemasse innerhalb des Laborsystems verbleibt, die Änderungen von r also in der Größenordnung von r_0 bleibt, kann g als konstant angesehen werden, weil G angenähert konstant ist und somit ein homogenes Feld vorliegt.

2.2 Radiales Gravitationsfeld

Verlässt man jedoch das Laborsystem, indem man sich z.B. von der Erdoberfläche entfernt, ist das Vorliegen eines homogenen Gravitationsfeldes nach Abb. 1.2 nicht mehr gegeben, statt dessen muss man nun einen radialen Feldverlauf wie in Abb. 1.1 berücksichtigen. Wie man dort leicht erkennen kann, muss die Gravitationsfeldstärke G mit zunehmendem Abstand r abnehmen, weil die Feldliniendichte abnimmt. Da alle Feldlinien radial verlaufen, ist die Anzahl der Feldlinien n durch jede die felderzeugende Größe umschließende Kugelfläche die gleiche. Die Feldstärke - und damit G - wird durch

den Quotienten von n und A bestimmt, es gilt:

$$G \sim \frac{n}{A} \quad (2.3)$$

Für die Oberfläche einer Kugel gilt

$$A_{\text{Kugel}} = 4\pi \cdot r^2$$

Eingesetzt in (3) erhält man für G die Beziehung

$$\frac{n}{A} = \frac{n}{4\pi \cdot r^2} \Rightarrow G \sim \frac{1}{r^2} \quad (2.4)$$

die Gravitationsfeldstärke nimmt also mit dem Quadrat des Abstandes ab. Dabei ist es recht plausibel, dass G proportional zur Masse M ist: Übt eine Masse M_1 auf einen Probekörper der Masse m eine bestimmte Kraft aus, so wird eine zweite Masse M_2 die gleiche Kraft bewirken. Werden die beiden Massen M_1 und M_2 unmittelbar nebeneinander angeordnet, so addieren sich die Kräfte der beiden Massen. Es gilt also:

$$G \sim M \quad (2.5)$$

Um aus der Zusammenfassung der Proportionalitäten nach Glg. (2.4) und (2.5) eine Gleichung für G zu gewinnen, muss noch eine Formkonstante γ eingeführt werden:

$$G = \gamma \cdot \frac{M}{r^2} \quad (2.6)$$

Eine Bestimmung der Formkonstanten γ wurde erstmalig von Cavendish zu Beginn des 19. Jahrhunderts mit Hilfe einer sog. *Drehwaage* vorgenommen. Dabei wird an einem dünnen Faden eine Achse aufgehängt, an deren Enden zwei gleiche Bleikugeln befestigt sind. Zwei weitere Bleikugeln größerer Masse werden nun punktsymmetrisch an die aufgehängten Kugeln herangeführt, dabei wird durch die Massenanziehung die Aufhängung verdreht. Bei bekannter Rückstellkraft der Aufhängung kann man daraus die Kraft zwischen den Massen m und M berechnen. Für diese Kraft gilt nach (1) und (6):

$$F = \gamma \cdot \frac{M}{r^2} \cdot m \quad (2.7)$$

Da m und M bekannt sind und F gemessen werden kann, lässt sich daraus ein Wert für γ berechnen. Man erhält

$$\gamma = 6,670 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2} \quad (2.8)$$

Diese Konstante wird als Gravitationskonstante bezeichnet.

2.3 Berechnungsbeispiele

2.3.1 Fallbeschleunigung auf der Erdoberfläche

Setzt man in Glg. (2.6) die entsprechenden Werte für die Masse M der Erde und den Erdradius r_0 ein, so erhält man einen Wert für die Gravitationsfeldstärke $g = G(r_0)$ auf der Erdoberfläche:

$$g = \gamma \cdot \frac{M}{r^2} = 6,670 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2} \cdot \frac{5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{(6,371 \cdot 10^6 \text{ m})^2} = 9,810 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

2.3.2 Gravitationsfeldstärke im Mondabstand

Der Mond bewegt sich im Gravitationsfeld der Erde, wobei die Massenanziehung ihn auf einer (angenäherten) Kreisbahn hält. Die Gravitationsfeldstärke der Erde beträgt dort

$$G(\Gamma_{\text{Erde-Mond}}) = 6,670 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2} \cdot \frac{5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{(3,844 \cdot 10^8 \text{ m})^2} = 0,00269 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

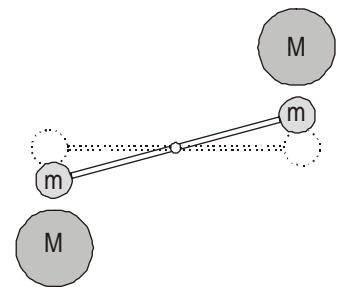


Abb. 2.1: Experimentelle Bestimmung von γ nach Cavendish (Ansicht von oben)

2.4 Überlagerung von Gravitationsfeldern

Wenn auch die Massen von Erde und Mond sehr unterschiedlich sind, erzeugen sie beide auf Grund ihrer Masse jeweils ein eigenes Gravitationsfeld. Bewegt man einen Probekörper von der Oberfläche der Erde zur Oberfläche des Mondes, nimmt auf dem Weg dorthin die Gravitationsfeldstärke der Erde ab und die des Mondes zu. Da sie auf einer gedachten geraden Linie zu jedem Zeitpunkt entgegengesetzt gerichtet sind, gibt es einen Punkt zwischen den beiden Himmelskörpern, bei dem sich die beiden Kraftwirkungen genau aufheben. Ist dieser Punkt überschritten, würde der Probekörper weiter auf den Mond zu beschleunigt werden und nicht mehr zur Erde zurückfallen können.

Gesucht ist also der Abstand s (vom Erdmittelpunkt), bei dem gilt:

$$G(r_{\text{Erde}}) = G(r_{\text{Mond}}) \quad (2.9)$$

Da der Abstand vom Erdmittelpunkt aus angegeben werden soll ($s = r_{\text{Erde}}$), muss der Abstand vom Mittelpunkt des Mondes r_{Mond} in Bezug zum (mittleren) Abstand zwischen Erde und Mond gesetzt werden, man erhält:

$$r_{\text{Mond}} = r_{\text{Erde-Mond}} - s \quad (2.10)$$

Eingesetzt in Glg. (9) erhält man

$$G(s) = G(r_{\text{Erde-Mond}} - s) \quad (2.11)$$

Eingesetzt in Glg. (6) ergibt sich daraus

$$\gamma \cdot \frac{M_{\text{Erde}}}{s^2} = \gamma \cdot \frac{M_{\text{Mond}}}{(r_{\text{Erde-Mond}} - s)^2} \quad (2.12)$$

Kürzen von γ , Bilden des Kehrwerts und Ausmultiplizieren liefert die quadratische Gleichung

$$s^2 \cdot \left(1 - \frac{M_{\text{Mond}}}{M_{\text{Erde}}} \right) - 2 \cdot s \cdot r_{\text{Erde-Mond}} + r_{\text{Erde-Mond}}^2 = 0$$

Nach Einführen einer reduzierten Strecke

$$r_{\text{red}} = \frac{r_{\text{Erde-Mond}}}{1 - \frac{M_{\text{Mond}}}{M_{\text{Erde}}}}$$

ergeben sich zwei Lösungen nach

$$s_{1,2} = r_{\text{red}} \pm \sqrt{r_{\text{red}}^2 - r_{\text{Erde-Mond}}^2} \quad (2.13)$$

Für die reduzierte Strecke erhält man

$$r_{\text{red}} = \frac{3,844 \cdot 10^8 \text{ m}}{1 - \frac{7,35 \cdot 10^{22} \text{ kg}}{5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}}} = 3,892 \cdot 10^8 \text{ m}$$

und nach Einsetzen in (2.13) die beiden Lösungen

$$s_1 = 3,783 \cdot 10^8 \text{ m} \quad \text{und} \quad s_2 = 3,905 \cdot 10^8 \text{ m}$$

Bei der ersten Lösung befindet man sich 6100 km ($= r_{\text{Mond}}$) vor dem Mondmittelpunkt (der Mond hat einen Radius von 1738 km), also ca. 4362 km über seiner der Erde zugewandten Oberfläche, bei der zweiten Lösung 6093 km hinter dem Mondmittelpunkt, also 4355 km über seiner der Erde abgewandten Oberfläche.

Da aber bei der zweiten Lösung die Kraftwirkungen die *gleiche* Richtung haben und sich somit nicht gegenseitig aufheben können, ist dies keine Lösung der Gleichung (dies ist typisch für die Lösung einer quadratischen Gleichung wegen der Mehrdeutigkeit des Vorzeichens einer Wurzel). Die erste Lösung ist also die zutreffende.

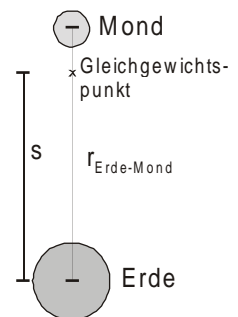


Abb. 2.2: Verwendete Größen zur Berechnung des Gleichgewichtspunktes zwischen Erde und Mond

2.5 Körper im Gravitationsfeld

2.5.1 Hubarbeit im homogenen Gravitationsfeld

Hebt man im Laborsystem einen Körper der Masse m um die Höhe h an, so wird an ihm Arbeit verrichtet. Dabei wird davon ausgegangen, dass die dazu aufzuwendende Kraft kollinear zur zurückgelegten Strecke und diese wiederum kollinear zur Richtung der Fallbeschleunigung g ist. Allgemein gilt für die Arbeit

$$W = F \cdot s \quad (2.14)$$

In skalarer Schreibweise erhält man also mit $F = m \cdot g$ die bekannte Gleichung

$$W = m \cdot g \cdot h \quad (2.15)$$

Bei diesem Vorgang ist es unerheblich, ob der Körper in einem einzigen Prozess um die Höhe h angehoben wird oder ob man diesen Vorgang in Teilschritte unterteilt, indem man z.B. in n Schritten jeweils eine Höhe h/n zurücklegt. In diesem Fall ist die insgesamt verrichtete Arbeit die Summe der bei jedem Schritt verrichteten Arbeiten:

$$W = W_1 + W_2 + \dots + W_n = \sum_{i=1}^n W_i \quad (2.16)$$

Stellt man in einem Diagramm die Kraft in Abhängigkeit vom Ort s dar, so ergibt sich die verrichtete Arbeit in beiden Fällen als die Fläche zwischen dem Graphen $F = F(s)$ und der s -Achse in den Grenzen von 0 bis h (vergl. Abb. 2.3). In diesem Fall spielt die Unterteilung von h keine Rolle, da F während des gesamten zurückzulegenden Weges konstant ist. Nachdem der Körper angehoben wurde, kann er die ihm dabei zugeführte Energie wieder abgeben, so wird sie z.B. im freien Fall in kinetische Energie umgewandelt, da der Körper beschleunigt.

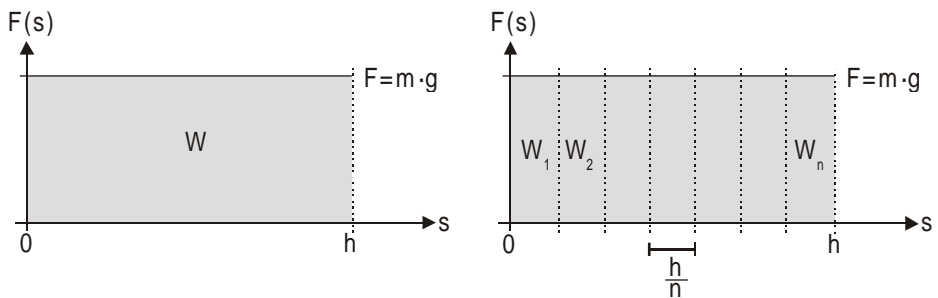


Abb. 2.3: Die verrichtete Arbeit als Fläche zwischen dem Graphen und der s -Achse bei einem einstufigen (links) bzw. bei einem n -stufigen Prozess (rechts)

2.5.2 Hubarbeit im radialen Gravitationsfeld

Bei einer Hubhöhe des Probekörpers, die nicht mehr klein ist im Vergleich zum Abstand zur felderzeugenden Größe, kann nicht mehr davon ausgegangen werden, dass die Kraft längs des Weges konstant ist, Glg. (2.14) ist hier also nicht mehr anwendbar. Einen möglichen Ansatz erhält man durch die schrittweise Addition der Teilarbeiten wie in Glg. (2.16). Hier ist nun allerdings die Kraft F in jedem Intervall in Abhängigkeit vom Ort neu zu berechnen. Teilt man wieder die gesamte zurückzulegende Strecke in n gleichgroße Teilintervalle der Breite Δr , so gilt für eine Teilarbeit

$$W_i = F(r_i) \cdot \Delta r \quad (2.17)$$

wobei sich die Kraft $F(r_i)$ aus dem Gravitationsgesetz nach Glg. (2.7) ergibt.

Summiert man wieder über alle Teilarbeiten auf, so erhält man für die insgesamt verrichtete Arbeit

$$W \approx F(r_1) \cdot \Delta r + F(r_2) \cdot \Delta r + \dots + F(r_n) \cdot \Delta r = \sum_{i=1}^n F(r_i) \cdot \Delta r \quad (2.18)$$

Die Graphik in Abb. 2.4 zeigt, dass dabei ein Fehler entsteht, da man innerhalb eines Teilintervalls nach wie vor davon ausgeht, dass die Gravitationsfeldstärke - und damit F - konstant ist. Dieser Fehler wird umso geringer, je größer man die Anzahl der Teilintervalle wählt.

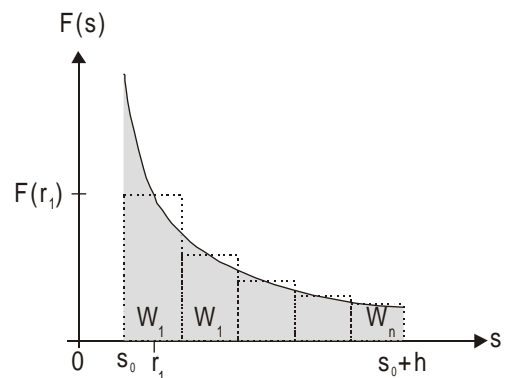


Abb. 2.4: Iterative Bestimmung von W , wenn F sich längs des Weges s ändert

In diesem Beispiel wurde bereits zur Minimierung dieses Iterationsfehlers der mittlere Wert des Intervalls für die Kraft $F(r_i)$ benutzt, der Fehler wäre größer, wenn man eine der Grenzen des Intervalls (sog. Ober- bzw. Untersumme) wählen würde. Die Differenzialrechnung liefert hier eine mathematische Behandlungsmethode, die es erlaubt, eine Summe auch dann noch zu berechnen, wenn sie aus unendlich vielen Summanden besteht. Die gesuchte Arbeit ergibt sich exakt, wenn man in dem Ausdruck

$$W \approx \sum_{i=1}^n F(r_i) \cdot \Delta r$$

Δr gegen 0 gehen lässt, was gleichzeitig bedeutet, dass n gegen Unendlich geht. Man erhält

$$W = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n F(r) \cdot \Delta r$$

Analog zum Ableiten von Funktionen (dort wird der Differenzenquotient durch einen Differenzialquotienten ersetzt) wird die nun infinitesimal kleine Größe von Δr mit dr bezeichnet und das Summenzeichen durch ein stilisiertes S ersetzt und als Integral bezeichnet. Da die Summe über ein Intervall gebildet wird, werden die untere und obere Grenze am Integralzeichen angegeben:

$$W = \int_{s_0}^{s_0+h} F(r) dr \quad (2.19)$$

Die Integration einer Funktion ist die Umkehrung der Differenziation, d.h., um das Integral zu lösen muss eine Funktion gefunden werden, deren Ableitung nach der Integrationsvariablen (hier: r) der Ausgangsfunktion $F(r)$ entspricht. Hier wie dort können Konstanten ausgeklammert werden und man erhält als Lösung:

$$W = \int_{s_0}^{s_0+h} \gamma \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} dr = \gamma \cdot M \cdot m \cdot \int_{s_0}^{s_0+h} \frac{1}{r^2} dr = \gamma \cdot M \cdot m \cdot \left[-\frac{1}{r} \right]_{s_0}^{s_0+h} \quad (2.20)$$

(Ableitungsregel für Potenzen: $x^n \xrightarrow{\text{Ableitung}} n \cdot x^{n-1}$ also für $n = -1$: $-\frac{1}{x} = -x^{-1} \xrightarrow{\text{Ableitung}} -(-1) \cdot x^{-1-1} = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$)

Einsetzen der Grenzen (Obersumme abzüglich Untersumme) liefert

$$W = \gamma \cdot M \cdot m \cdot \left(\frac{1}{s_0} - \frac{1}{s_0+h} \right) \quad (2.21)$$

Man beachte, dass bei der Berechnung der Arbeit lediglich die Wegkomponente längs der Kraftrichtung zur Arbeit beiträgt, die hier durch die Richtung der Gravitationsfeldlinien vorgegeben ist. Wird die Masse m so bewegt, dass sich ihr Abstand r zum Massemittelpunkt der felderzeugenden Größe nicht ändert, wird auch keine Arbeit verrichtet. Es ist also z.B. gleichgültig, ob eine Rakete senkrecht in eine Umlaufbahn startet oder auf einer schrägen Flugbahn: die zum Erreichen der Umlaufbahn benötigte Energie ist (abgesehen von unterschiedlichen Reibungsverlusten) in beiden Fällen gleich groß.

2.5.3 Das Potenzial eines Gravitationsfeldes

Eine Verallgemeinerung der Aussage von Glg. (22) erhält man, wenn man die Strecken s_0 und s_0+h durch die zugehörigen Radien entsprechend dem Abstand vom Mittelpunkt der felderzeugenden Größe ersetzt, dann erhält man

$$W = \gamma \cdot M \cdot m \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (2.22)$$

wobei r_1 der Abstand zu Beginn und r_2 der Abstand zum Ende der Bewegung ist. Ein Sonderfall ergibt sich, wenn man den Abstand r_2 ins Unendliche verlagert, dies würde z.B. der Fragestellung entsprechen, welche Arbeit aufzuwenden ist, um einen Körper aus einem endlichen Abstand r_1 vollständig aus dem Gravitationsfeld zu entfernen. Man erhält

$$W_{\infty}(r_1) = \gamma \cdot M \cdot m \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{\infty} \right) = \gamma \cdot M \cdot m \cdot \frac{1}{r_1} \quad (2.23)$$

Dieser Ausdruck ordnet einem Körper der Masse m eine bestimmte Energie zu, wobei ein bestimmter Bezugspunkt festgelegt wurde. Dieses Verfahren kennt man bereits bei der Berechnung der Hubarbeit, hier wird jedoch der Bezugspunkt in der Regel im Laborsystem willkürlich bei einer bestimmten Höhe mit 0 angenommen und von dort aus die Höhe h angegeben. Damit es nun aber möglich, jedem Körper eine Energie in Abhängigkeit von seinem Ort zuzuordnen, die als potenzielle Energie bezeichnet wird. Befindet sich ein Körper der Masse m zu Beginn der Bewegung unendlich weit von der felderzeugenden Größe M entfernt ($r_1 = \infty$) und wird anschließend bis auf einen Abstand r_2 an M herangeführt, so ergibt sich aus analogen Überlegungen (Vorzeichen beachten!)

$$W_{\infty}(r_2) = \gamma \cdot M \cdot m \cdot \left(\frac{1}{\infty} - \frac{1}{r_2} \right) = -\gamma \cdot M \cdot m \cdot \frac{1}{r_2} \quad (2.24)$$

Die potenzielle Energie eines Körpers ist danach definiert als

$$E_{\text{pot}}(r) = -\gamma \cdot M \cdot m \cdot \frac{1}{r} \quad (2.25)$$

Da alle Größen auf der rechten Seite der Gleichung positiv sind, ist diese potenzielle Energie immer negativ. Sie gibt an, welche Energie aufgewendet werden muss, um einen Körper aus dem Gravitationsfeld beliebig weit zu entfernen. Dazu muss ein Körper auf geeignete Weise Energie zugeführt werden (positives Vorzeichen!), und erst wenn die Summe aus potenzieller Energie und zugeführter Energie gleich oder größer als 0 ist, ist der Körper nicht mehr an die felderzeugende Größe gebunden.

Um unabhängig von der Masse m des Probekörpers eine Aussage machen zu können, welche potenzielle Energie ein Körper in einem Gravitationsfeld besitzt, wird der Begriff des **Potenzials** eingeführt. Im Gravitationsfeld ist es definiert als

$$V(r) = \frac{E_{\text{pot}}(r)}{m} = -\gamma \cdot M \cdot \frac{1}{r} \quad (2.26)$$

Das Gravitationspotenzial hat folglich die Einheit

$$[V] = [\gamma] \cdot [M] \cdot \left[\frac{1}{r} \right] = 1 \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2} \cdot 1 \text{kg} \cdot \frac{1}{\text{m}} = 1 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$$

Aus Glg. (2.26) kann man entnehmen, dass die Menge aller Punkte mit dem gleichen Potenzial den gleichen Abstand vom Mittelpunkt der felderzeugenden Größe haben, demnach liegen sie in diesem Fall auf der Oberfläche einer Kugel. Diese Flächen nennt man **Äquipotenzialflächen**.

2.5.4 Graphische Darstellung

Die Kraft F zwischen der felderzeugenden Größe und einer Probemasse hängt umgekehrt quadratisch vom Abstand r ab, während die Gravitationsfeldstärke G (und damit auch das Potenzial V) umgekehrt proportional zum Abstand sind. Die Graphik nach Abb. 2.5 zeigt den sich daraus ergebenden unterschiedlichen Verlauf von F und G im Bereich von r_0 bis $10 \cdot r_0$.

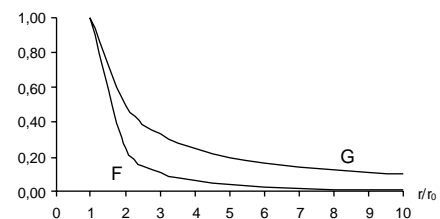


Abb. 2.5: Kraft und Gravitationsfeldstärke im Gravitationsfeld

2.6 Berechnungsbeispiele

2.6.1 Berechnung der Hubarbeit

Ein Körper der Masse $m = 5 \text{ kg}$ wird von der Erdoberfläche um die Höhe $h = 3000 \text{ m}$ angehoben. Gesucht ist die dabei zu verrichtende Arbeit W .

Lsg.:

Unter der Annahme, dass h klein ist gegenüber dem Erdradius, kann von einer konstanten Gravitationsfeldstärke g ausgegangen werden. Nach Glg. (2.15) gilt:

$$W = m \cdot g \cdot h = 5 \text{kg} \cdot 9,810 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 3000 \text{m} = 147150 \text{J}$$

Wird Glg. (2.21) zur Lösung herangezogen, so erhält man den exakten Wert:

$$W = \gamma \cdot M \cdot m \cdot \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_0 + h} \right) = 6,670 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2} \cdot 5,97 \cdot 10^{24} \text{kg} \cdot 5 \text{kg} \cdot \left(\frac{1}{6,371 \cdot 10^6 \text{m}} - \frac{1}{6,371 \cdot 10^6 \text{m} + 0,003 \cdot 10^6 \text{m}} \right)$$

$$W = 147086 \text{J}$$

2.6.2 Potenzielle Energie eines Körpers

Gesucht wird die potenzielle Energie eines Körpers der Masse $m = 5 \text{ kg}$ auf der Erdoberfläche sowie die mindestens benötigte Anfangsgeschwindigkeit, für einen senkrechten Wurf, mit dem der Körper das Gravitationsfeld verlassen kann.

Lsg.:

Nach Glg. (2.25) erhält man für die potenzielle Energie

$$E_{\text{pot}}(r) = -\gamma \cdot M \cdot m \cdot \frac{1}{r} = -6,670 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2} \cdot 5,97 \cdot 10^{24} \text{kg} \cdot 5 \text{kg} \cdot \frac{1}{6,371 \cdot 10^6 \text{m}} = -3,13 \cdot 10^8 \text{J}$$

Um das Gravitationsfeld verlassen zu können, muss die Anfangsgeschwindigkeit v_0 so hoch sein, dass die kinetische Energie mindestens den gleichen Betrag hat wie die potenzielle Energie. Diese Energie muss dem Körper beim Start auf geeignete Weise zugeführt werden, damit seine Gesamtenergie gleich oder größer 0 wird. Es muss also gelten:

$$E_{\text{pot}}(r_0) + E_{\text{kin}}(v_0) \geq 0$$

Einsetzen der entsprechenden Gleichungen und Auflösen nach v_0 liefert

$$-\gamma \cdot M \cdot m \cdot \frac{1}{r_0} + \frac{1}{2} m \cdot v_0^2 \geq 0 \Rightarrow v_0^2 \geq 2 \cdot \gamma \cdot M \cdot \frac{1}{r_0} \Rightarrow v_0 \geq \sqrt{2 \cdot \gamma \cdot M \cdot \frac{1}{r_0}}$$

und man erhält nach Einsetzen der Zahlenwerte

$$v_0 \geq \sqrt{2 \cdot \gamma \cdot M \cdot \frac{1}{r_0}} = \sqrt{2 \cdot 6,670 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2} \cdot 5,97 \cdot 10^{24} \text{kg} \cdot \frac{1}{6,371 \cdot 10^6 \text{m}}} = 11180 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Die Anfangsgeschwindigkeit muss als größer als ca. 11,2 km/s sein, damit der Körper das Gravitationsfeld der Erde verlassen kann. Umgekehrt heißt das, dass ein Körper, der aus (nahezu) unendlicher Entfernung aus einer Ruhelage frei auf die Erde zu fällt, mit dieser Geschwindigkeit auf die Erdoberfläche aufprallt, was die hohe Geschwindigkeit von Meteoriten erklärt. Man beachte, dass bei der Berechnung von v_0 die Masse des Probekörpers herausfällt, diese Rechnung gilt also für jeden Körper gleich welcher Masse m .

2.6.3 Potentiale im Gravitationsfeld der Erde

Gesucht ist die Potenzialdifferenz im Gravitationsfeld der Erde zwischen einer erdnahen ($h = 400 \text{ km}$) und einer geostationären Umlaufbahn ($h = 32000 \text{ km}$).

Lsg.:

Die gesuchte Potenzialdifferenz ergibt sich aus der Differenz der Potentiale in den beiden angegebenen Abständen. Dabei muss zur Höhe h noch der Erdradius addiert werden, da sich die Höhenangaben auf die Erdoberfläche und nicht den Erdmittelpunkt (als felderzeugende Größe) beziehen. Unter Berücksichtigung von Glg. (2.26) erhält man also:

$$\Delta V = V(r_2) - V(r_1) = -\gamma \cdot M \cdot \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) = \gamma \cdot M \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

Einsetzen der Zahlenwerte liefert

$$\Delta V = 6,670 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2} \cdot 5,97 \cdot 10^{24} \text{kg} \cdot \left(\frac{1}{6,371 \cdot 10^6 \text{m} + 0,400 \cdot 10^6 \text{m}} - \frac{1}{6,371 \cdot 10^6 \text{m} + 32,0 \cdot 10^6 \text{m}} \right) = 4,84 \cdot 10^7 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$$

2.7 Bewegung eines Körpers im Gravitationsfeld

Bislang wurden nur Größen betrachtet, die für einen Körper relevant sind, der sich an einem bestimmten Ort in einem Gravitationsfeld befindet oder einen Übergang von einem Ort zum anderen ausführt. Die dabei auftretenden vektoriellen Größen stimmen in ihrer Richtung mit der der Feldlinien des Gravitationsfeldes überein, Bewegungen längs dieser Richtungen überführen den Körper auf ein anderes Potenzial und ändern damit die potenzielle Energie und die auf den Körper ausgeübte Kraft.

Bewegt sich ein Probekörper senkrecht zu den Feldlinien, bleibt seine potenzielle Energie konstant, dafür besitzt er wegen seiner Bewegung eine kinetische Energie. Die Gesamtenergie des Körpers ist dann die Summe aus potenzieller und kinetischer Energie:

$$E_{\text{ges}} = E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}} \quad (2.27)$$

Die Geschwindigkeitskomponente senkrecht zu den Feldlinien führt zu einer Rotation um den Mittelpunkt der felderzeugenden Größe, wobei eine Zentrifugalkraft auftritt. Ein Sonderfall ergibt sich, wenn diese Zentrifugalkraft F_Z betragsmäßig genauso groß ist wie die von der Zentralmasse M ausgeübte Zentripetalkraft F_M und sie sich gegenseitig somit aufheben:

$$F_Z = F_M \quad (2.28)$$

In diesem Fall beschreibt die Probemasse eine Kreisbahn um M mit dem Radius r . Die Zentripetalkraft F_M wird durch die Massenanziehungskraft bewirkt, für sie gilt nach Glg. (2.7)

$$F_M = \gamma \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} \quad (2.29)$$

und für die Zentrifugalkraft F_Z gilt

$$F_Z = m \cdot \frac{v^2}{r} \quad (2.30)$$

Eingesetzt in Glg. (2.28) ergibt sich für die Bahngeschwindigkeit v , bei der eine Kreisbahn entsteht, die Beziehung

$$m \cdot \frac{v^2}{r} = \gamma \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} = 0 \Rightarrow v = \sqrt{\gamma \cdot \frac{M}{r}} \quad (2.31)$$

Aus Glg. (2.31) erhält man somit für die kinetische Energie

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \gamma \cdot \frac{M \cdot m}{r} \quad (2.32)$$

und nach Glg. (2.25) gilt für die potenzielle Energie

$$E_{\text{pot}} = -\gamma \cdot \frac{M \cdot m}{r} \quad (2.33)$$

Eingesetzt in Glg. (2.27) ergibt sich für die Gesamtenergie

$$E_{\text{ges}} = -\gamma \cdot \frac{M \cdot m}{r} + \frac{1}{2} \gamma \cdot \frac{M \cdot m}{r} = -\frac{1}{2} \gamma \cdot \frac{M \cdot m}{r} \quad (2.34)$$

Die Gesamtenergie eines Körpers, der sich auf einer Kreisbahn um eine Zentralmasse M bewegt, ist als genau halb so groß wie die potenzielle Energie dieses Körpers, wenn er sich im gleichen Abstand r in Ruhe befindet, denn für die Bahnbewegung musste ihm kinetische Energie zugeführt werden, die zur (negativen) Ruheenergie addiert wird.

Obwohl es sich hier um eine beschleunigte Bewegung handelt, ist die Gesamtenergie zu jedem Zeitpunkt der Bewegung konstant, da die beschleunigende Kraft F_M senkrecht zur Bewegungsrichtung bzw. der Richtung von v steht und somit keine Arbeit verrichtet wird.

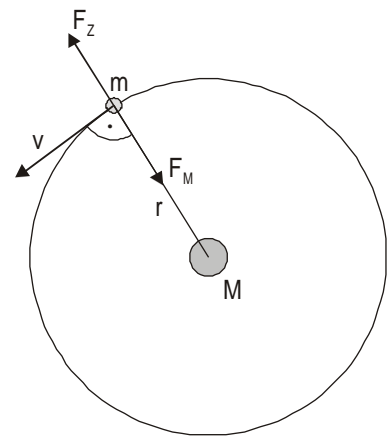


Abb. 2.6: Bewegung einer Masse m auf einer Kreisbahn um eine Zentralmasse M

3 Das elektrische Feld

Die felderzeugende Größe beim elektrischen Feld ist eine Ladung. Wie beim Gravitationsfeld kann diese als punktförmig angesehen werden, somit entsteht in der Umgebung einer Ladung ein Radialfeld. Abweichend vom Gravitationsfeld wird jedoch die Richtung der Feldlinien bestimmt durch das Vorzeichen der felderzeugenden Ladung. Dabei wird die Kraftwirkung auf einen positiv geladenen Probekörper zugrunde gelegt, folglich weisen die Feldlinien bei einer positiven felderzeugenden Ladung von der Ladung weg (gleichnamige Ladungen stoßen sich ab) und bei einer negativen felderzeugenden Ladung zu dieser hin (vergl. Abb. 3.1).

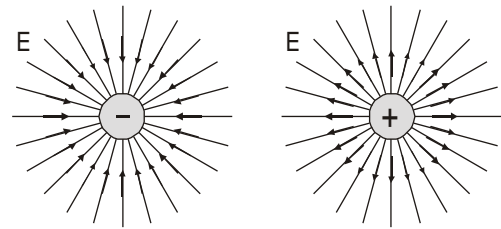


Abb. 3.1: Richtung der Feldlinien bei einer negativen (links) und einer positiven Ladung

3.1 Ladungen auf metallischen Leitern

Im Innern eines elektrischen Leiters sind es frei bewegliche Ladungsträger, die sich beim Anlegen einer Spannung in Bewegung setzen und zu einem Stromfluss führen. Wenn in der Zeit t die Ladungsmenge Q transportiert wird, gilt die Beziehung

$$I = \frac{Q}{t} \quad (3.1)$$

Dennoch ist der Leiter zu jedem Zeitpunkt nach außen hin elektrisch neutral, das heißt, zu jedem Ladungsträger (in metallischen Leitern sind dies Elektronen) gibt es eine gleichgroße, entgegengesetzt gerichtete Ladung (z.B. die Atomkerne, denen die Elektronen zugeordnet sind).

Wird einem metallischen Leiter von außen eine zusätzliche Ladung Q zugeführt, so verändert sich das ursprüngliche Gleichgewicht, der Leiter ist geladen. In der Regel besteht eine solche Ladung Q aus einer bestimmten Zahl n von Elementarladungen, es gilt

$$Q = n \cdot q \quad (3.2)$$

3.1.1 Ladungsverteilung auf einer Kugel

Da sich gleichnamige Ladungen abstoßen, verteilen sich die zusätzlich aufgebrachten Ladungen so, dass sie den größtmöglichen Abstand voneinander einnehmen. Auf einer Metallkugel würden sich die Ladungen also gleichmäßig auf der Oberfläche verteilen, während im Inneren der Kugel keine dieser Ladungen anzutreffen ist. Die Anzahl der Ladungen pro Flächeneinheit bezeichnet man als Flächenladungsdichte σ :

$$\sigma = \frac{Q}{A} \quad (3.3)$$

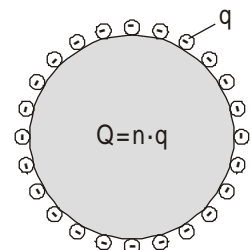


Abb. 3.3: Gleichmäßige Ladungsverteilung auf einer Kugeloberfläche

Das elektrische Feld einer geladenen, metallischen Kugel ist ein Radialfeld.

3.1.2 Ladungsverteilung auf einer ebenen Platte

Wird eine metallisch leitende Platte mit einer Ladung Q versehen, so verteilen sich auch hier die Ladungen auf der Oberfläche. Auf den planen Flächen stellt sich wie bei der Kugel eine gleichmäßige Verteilung ein, die jedoch an den Kanten und den Schmalseiten gestört ist. Bis auf diese Randstörungen weisen beide Flächen der Platte die gleiche Flächenladungsdichte auf (vergl. Abb. 3.4). In der Plattenmitte und in geringem Abstand von der Platte ist das elektrische Feld annähernd homogen.

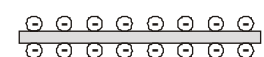


Abb. 3.4: Ladungsverteilung auf einer ebenen Platte

3.1.3 Ladungsverteilung zwischen zwei planparallelen Platten

Werden zwei ebene und gleichgroße Platten parallel zueinander angeordnet, so entsteht ein sog. **Plattenkondensator**. Wird die eine der beiden Platten mit einer positiven Ladung und die andere mit einer gleich großen negativen Ladung

versehen, wirken zwischen den Ladungen auf den Oberflächen der beiden Platten nicht nur die abstoßenden Kräfte, die zu einer gleichmäßigen Ladungsverteilung auf der Fläche führen, sondern außerdem noch die Anziehungskräfte der gegenüberliegenden Ladungen der jeweils anderen Platte. Dies führt dazu, dass die Ladungen von den Plattenrückseiten auf die gegenüberstehenden Flächen der beiden Platten wandern (vergl. Abb. 3.5). Das elektrische Feld im Raum zwischen den beiden Platten ist (bis auf die unvermeidlichen Randstörungen) angenähert homogen.

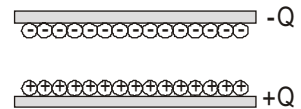


Abb. 3.5: Ladungsverteilung auf zwei entgegengesetzt geladenen Platten

3.2 Kraftwirkung im elektrischen Feld

Das elektrische Feld ist gekennzeichnet durch die Kraftwirkung auf eine Probeladung, die felderzeugende Größe ist ebenfalls eine Ladung. Analog zum Gravitationsfeld (vergl. 2.1) gilt für die Kraft auf die Probeladung q

$$F_C = q \cdot E \quad (3.4)$$

wobei q die Ladung der Probeladung und E die elektrische Feldstärke an einem Punkt des Feldes einer felderzeugenden Ladung Q ist. Für die Einheit von E ergibt sich daraus

$$[E] = \frac{[F_C]}{[q]} = \frac{1 \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{1 \text{ C}} = \frac{1 \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{1 \text{ A} \cdot \text{s}} = 1 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{A} \cdot \text{s}^3}$$

3.2.1 Arbeit im elektrischen Feld

In einem elektrischen Feld wird an einer Probeladung q Arbeit verrichtet, wenn sie in Richtung der Feldlinien um die Strecke s bewegt wird. Im homogenen Feld ist die Feldstärke und damit die Kraft F_C auf die Probeladung konstant und man erhält für die Arbeit

$$W = F_C \cdot s = q \cdot E \cdot s \quad (3.5)$$

Im inhomogenen Feld (also auch im Radialfeld) ist F_C nicht mehr konstant, sondern vom Ort s abhängig, man erhält in Analogie zu Glg (2.19) den Ausdruck

$$W = \int_{s_1}^{s_2} F_C(s) ds = q \cdot \int_{s_1}^{s_2} E(s) ds \quad (3.6)$$

W gibt an, welche Arbeit verrichtet werden muss, um eine Ladung von einem Ort s_1 zu einem Ort s_2 zu transportieren. Für eine Probeladung q gilt

$$\Delta W = W_2 - W_1 \quad (3.7)$$

wobei W_1 und W_2 die Energie der Probeladung an den beiden Orten ist. Analog zu 2.5.3 kann man jedem Ort ein Potenzial zuordnen, das die Energie pro Ladung angibt:

$$V(s) = \frac{W(s)}{q} \quad (3.8)$$

damit ergibt sich aus Glg. (3.7) die Beziehung

$$\Delta V = V(s_2) - V(s_1) \quad (3.9)$$

wobei ΔV die Potentialdifferenz zwischen den beiden Punkten ist. Diese Größe gibt an, welche Arbeit pro Ladung verrichtet werden muss, um die Ladung q vom Ort mit dem Potenzial $V(s_1)$ zum Ort mit dem Potenzial $V(s_2)$ zu transportieren. Es gilt also

$$\frac{\Delta W}{q} = \Delta V \quad (3.10)$$

Dies ist aber gerade die Definition der elektrischen Spannung, das heißt, die **elektrische Spannung** beschreibt die Potentialdifferenz zwischen zwei Punkten des elektrischen Feldes.

Da sich die elektrische Spannung als Differenz zweier Potentiale ergibt:

$$U = \Delta V = \frac{\Delta W}{q} \quad (3.11)$$

folgt daraus für die Einheit der Spannung

$$[U] = \frac{[W]}{[q]} = \frac{1 \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}{\text{A} \cdot \text{s}} = 1 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{A} \cdot \text{s}^3}$$

3.2.2 Spannung und elektrisches Feld

Legt man an die beiden Platten nach Abb. 3.5 eine Spannung an, so entsteht zwischen den Platten ein elektrisches Feld. Zur Bestimmung der Feldstärke betrachtet man eine Ladung, die von einer Platte zur anderen gegen die Kraftwirkung des Feldes transportiert wird, wobei Arbeit verrichtet wird. Haben die Platten den Abstand d , so gilt nach Glg. (3.5)

$$W = F_C \cdot d = q \cdot E \cdot d \quad (3.12)$$

Mit Glg. (3.11) lässt sich W ausdrücken durch

$$W = q \cdot U \quad (3.13)$$

Einsetzen von Glg. (3.12) in (3.13) ergibt

$$q \cdot U = q \cdot E \cdot d \Rightarrow U = E \cdot d \quad (3.14)$$

Aufgelöst nach E ergibt sich damit für die elektrische Feldstärke zwischen den Platten

$$E = \frac{U}{d} \quad (3.15)$$

Diese Ableitung von E aus der Spannung U zwischen zwei Punkten im Abstand d rechtfertigt die Verwendung der Einheit

$$[E] = \frac{[U]}{[d]} = 1 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

3.3 Ladung und elektrisches Feld

Bislang wurde nur der Einfluss eines elektrischen Feldes auf eine Probeladung q untersucht, eine quantitative Aussage über die Feldstärke, die durch eine Ladung Q als felderzeugende Größe entsteht, steht aber noch aus. Dabei liegt aber auf der Hand, dass die Feldstärke abhängt vom Betrag von Q . Wie man den Abb. 3.3 bis 3.5 entnehmen kann, steigt die Flächenladungsdichte σ , wenn mehr Ladungen auf einer gegebenen Fläche verteilt werden. Gleichzeitig nimmt die Feldstärke des elektrischen Feldes zu. Wie bei den Überlegungen beim Gravitationsfeld kann man davon ausgehen, dass eine Proportionalität vorliegt:

$$\sigma \sim E \quad (3.16)$$

Zur Bestimmung des Proportionalitätsfaktors muss in einem bekannten elektrischen Feld E - z.B. im Inneren eines Plattenkondensators - die Flächenladungsdichte bestimmt werden, die sich auf einer in das Feld verbrachten Fläche ausbildet. Dazu werden zwei gleichgroße Metallplatten bekannter Fläche A gleichzeitig in das Feld eingetaucht, wobei sich die beiden zugewandten Flächen der Metallplatten berühren. Anschließend werden die Platten getrennt und aus dem Feld entfernt. Durch Messung der aufgebrachten Ladungsmenge Q lässt sich die zugehörige Flächenladungsdichte σ bestimmen.

Als Proportionalitätsfaktor wird die sog. Dielektrizitätskonstante ϵ_0 eingeführt:

$$\sigma = \epsilon_0 \cdot E \quad [\epsilon_0] = \frac{[\sigma]}{[E]} = \frac{1 \frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{m}^2}}{1 \frac{\text{V}}{\text{m}}} = 1 \frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{V} \cdot \text{m}} \quad (3.17)$$

Messungen haben für diese Naturkonstante den Wert $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{V} \cdot \text{m}}$ ergeben.

3.3.1 Kapazität eines Plattenkondensators

Damit zwischen den Platten eines Plattenkondensators eine bestimmte Feldstärke entsteht, müssen die beiden Platten mit entgegengesetzten Ladungen vom Betrag Q versehen werden. Diese verteilen sich gleichmäßig auf die Plattenfläche A und erzeugen so eine bestimmte Flächenladungsdichte s . Durch das Aufbringen von entgegengesetzten Ladungen entsteht zwischen den Platten eine Potenzialdifferenz, also liegt zwischen den Platten eine bestimmte Spannung U an. Nach Glg. (3.3) und Glg. (3.17) gilt

$$\sigma = \frac{Q}{A} = \epsilon_0 \cdot E \quad (3.18)$$

Ersetzt man E durch den Ausdruck von Glg. (3.15), so erhält man

$$\frac{Q}{A} = \epsilon_0 \cdot \frac{U}{d} \Rightarrow \frac{Q}{U} = \epsilon_0 \cdot \frac{A}{d} \quad (3.19)$$

Der Quotient von Q und U gibt an, welche Ladungsmenge pro Spannungseinheit benötigt wird und wird bestimmt durch die geometrischen Abmessungen des Plattenpaares. Man bezeichnet diesen Quotienten als **Kapazität** des Plattenkondensators:

$$C = \epsilon_0 \cdot \frac{A}{d} \quad (3.20)$$

Der Begriff Kapazität impliziert die Fähigkeit, etwas „aufzunehmen“, hier deutet er darauf hin, dass in dem Kondensator Ladungen gespeichert werden können, wobei die gespeicherte Ladungsmenge von der Spannung abhängt, die dabei zwischen den Platten des Kondensators entsteht oder von außen an die Platten angelegt wird, wobei eine bestimmte Ladungsmenge auf die Platten transportiert wird. Für die Einheit von C gilt

$$[C] = [\epsilon_0] \cdot \frac{[A]}{[d]} = 1 \frac{A \cdot s}{V \cdot m} \cdot \frac{1m^2}{1m} = 1 \frac{A \cdot s}{V} = 1 \frac{C}{V}$$

Diese Einheit wird auch abgekürzt als 1 F (Farad). Dies ist ein in der Praxis sehr großer Wert, deswegen findet man häufig die dezimalen Untergrößen μF (10^{-6} F, Mikrofarad), nF (10^{-9} F, Nanofarad) und pF (10^{-12} Fm Pikofarad).

3.3.2 Elektrische Feldstärke einer Punktladung

Eine punktförmige Ladung als felderzeugende Größe erzeugt ein elektrisches Radialfeld. Da sich die Feldlinien radial nach außen erstrecken, unterscheidet sich in hinreichender Entfernung das Feld nicht von dem einer Kugel, auf dessen Oberfläche die gleiche Ladung verteilt ist. Nach der Definition der Flächenladungsdichte gilt auch hier Glg. (3.18), wobei die Fläche die Oberfläche einer Kugel ist mit

$$A = 4\pi \cdot r^2$$

Eingesetzt in Glg. (3.18) und aufgelöst nach E ergibt sich

$$E = \frac{1}{4\pi \cdot \epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \quad (3.21)$$

Hier zeigt sich die große Ähnlichkeit mit den Gesetzen im Gravitationsfeld - vergl. Glg. (2.6) - mit der felderzeugenden Größe im Zähler, dem Quadrat des Abstandes im Nenner und einem konstanten Vorfaktor.

Unter Verwendung von Glg. (3.4) erhält man einen Ausdruck für die Kraftwirkung zwischen zwei (als punktförmig anzusehenden) Ladungen, wobei Q die felderzeugende Größe und q eine Probeladung ist:

$$F_C = \frac{1}{4\pi \cdot \epsilon_0} \frac{q \cdot Q}{r^2} \quad (3.22)$$

Da die auftretenden Beziehungen symmetrisch sind, weil sowohl q als auch Q wechselweise als felderzeugende Größe angesehen werden dürfen, können q und Q durch beliebige Ladungen Q_1 und Q_2 ersetzt werden, wobei r der Abstand zwischen den Mittelpunkten der Ladungen ist. In dieser Form bezeichnet man das Gesetz auch als **Coulombsches Gesetz**:

$$F_C = \frac{1}{4\pi \cdot \epsilon_0} \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2} \quad (3.23)$$

3.4 Berechnungsbeispiele

3.4.1 Aufladung eines Plattenkondensators

Ein Plattenkondensator aus kreisförmigen Platten mit einem Durchmesser von 25 cm und einem Plattenabstand von 1 cm kann maximal auf eine Spannung von 40 000 V aufgeladen werden, bevor ein Funke überspringt und die Platten entlädt. Gesucht sind seine Kapazität, die Feldstärke zwischen und die Ladung auf den Platten bei maximaler Spannung.

Lsg.:

Aus Glg. (3.20) ergibt sich für die Kapazität

$$C = \epsilon_0 \cdot \frac{A}{d} = \epsilon_0 \cdot \frac{\pi \cdot r^2}{d} = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{V} \cdot \text{m}} \cdot \frac{\pi \cdot (0,125\text{m})^2}{0,01\text{m}} = 8,69 \cdot 10^{-12} \text{F} = 8,69 \text{pF}$$

Die Feldstärke ergibt sich im Plattenkondensator nach Glg. (3.15) zu

$$E = \frac{U}{d} = \frac{40000\text{V}}{0,01\text{m}} = 4,00 \cdot 10^6 \frac{\text{V}}{\text{m}} = 4000 \frac{\text{kV}}{\text{m}}$$

Die auf den Platten befindliche Ladung erhält man nach Glg. (3.19) zu

$$\frac{Q}{U} = \epsilon_0 \cdot \frac{A}{d} = C \Rightarrow Q = C \cdot U = 4,35 \cdot 10^{-11} \text{F} \cdot 4,00 \cdot 10^4 \text{V} = 1,74 \cdot 10^{-6} \text{C} = 1,74 \mu\text{C}$$

3.4.2 Aufladung einer Kugel

Eine Metallkugel mit dem Radius $r = 5 \text{ cm}$ wird mit einer Ladung $Q = 35 \text{ nC}$ versehen. Gesucht ist die Flächenladungsdichte an der Oberfläche sowie die elektrische Feldstärke in einem Abstand $d = 10 \text{ cm}$ von der Oberfläche. Welche Spannung muss eine Spannungsquelle haben, damit die Kugel entsprechend aufgeladen wird?

Lsg.:

Die Flächenladungsdichte ergibt sich aus dem Quotienten von Ladung und der Kugeloberfläche zu

$$\sigma = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{4\pi \cdot r^2} = \frac{35 \cdot 10^{-9} \text{C}}{4\pi \cdot (0,05\text{m})^2} = 1,11 \cdot 10^{-6} \frac{\text{C}}{\text{m}^2}$$

Zur Bestimmung der elektrischen Feldstärke kann entweder der obige Ansatz für die Flächenladungsdichte auf der Oberfläche einer Kugel mit dem Radius $r_1 = r + d$ oder direkt die Gleichung (3.21) verwendet werden.

Über die Flächenladungsdichte erhält man

$$\sigma = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{4\pi \cdot r^2} = \frac{35 \cdot 10^{-9} \text{C}}{4\pi \cdot (0,15\text{m})^2} = 1,24 \cdot 10^{-7} \frac{\text{C}}{\text{m}^2} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{1,24 \cdot 10^{-7} \frac{\text{C}}{\text{m}^2}}{8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{V} \cdot \text{m}}} = 13,98 \cdot 10^3 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

über Glg. (3.21) erhält man den selben Wert für E mit

$$E = \frac{1}{4\pi \cdot \epsilon_0} \frac{Q}{r^2} = \frac{1}{4\pi \cdot 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{V} \cdot \text{m}}} \frac{35 \cdot 10^{-9} \text{C}}{(0,15\text{m})^2} = 13,98 \cdot 10^3 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

Um die Spannung der Spannungsquelle zu erhalten, ist die Überführungsarbeit von der Kugeloberfläche zu einem hinreichend (unendlich) weit entfernten Punkt zu bestimmen. Nach Glg. (3.6) ist beim Transport einer Probeladung von der Oberfläche der Kugel die Arbeit W zu verrichten, wobei über den Weg von $s = r$ bis $s = \infty$ zu integrieren ist. Durch Division durch q erhält man die dadurch überbrückte Potenzialdifferenz, also die gesuchte Spannung U :

$$W = q \cdot \int_r^{\infty} E(s) ds \Rightarrow U = \frac{W}{q} = \int_r^{\infty} E(s) ds$$

Verwenden von Glg. (3.21) für $E(s)$, Integration über die angegebenen Grenzen und Einsetzen der Zahlenwerte ergibt

$$U = \frac{Q}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \int_r^{\infty} \frac{1}{s^2} ds = \frac{Q}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \left(-\frac{1}{s} - \left(-\frac{1}{\infty} \right) \right) = -\frac{Q}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} = -\frac{35 \cdot 10^{-9} \text{C}}{4\pi \cdot 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{V} \cdot \text{m}}} \cdot \frac{1}{0,05\text{m}} = 6290\text{V}$$

3.4.3 Abstoßung zwischen zwei gleich geladenen Kugeln

Zwei metallisierte Tischtennisbälle mit einem Radius $r_K = 16 \text{ mm}$ und einer Masse von $m = 3,2 \text{ g}$ werden jeweils an einem Faden der Länge $\ell = 0,8 \text{ m}$ so aufgehängt, dass sich ihre Oberflächen gerade eben berühren. Anschließend werden sie gleichzeitig mit einer Ladung versehen, woraufhin sie sich abstoßen. Der sich dabei einstellende Abstand zwischen den Oberflächen beträgt $d = 3 \text{ mm}$. Gesucht ist die Ladung Q , die auf jede der beiden Kugeln aufgebracht worden ist.

Lsg.:

Jede der aufgehängten Kugeln entspricht einem Fadenpendel. Durch die abstoßende Kraft der beiden gleichnamigen Ladungen werden sie seitlich ausgelenkt, bis die rückstellende Kraft F_R aufgrund der Fallbeschleunigung g die Kraft durch die elektrische Abstoßung F_C aufhebt.

Die Kraft F_C erhält man aus dem Coulombschen Gesetz nach Glg. (3.23), wobei $Q_1 = Q_2 = Q$ gesetzt werden kann. Der Abstand r der Ladungsmittelpunkte ergibt sich dabei aus der Summe der beiden Kugelradien r_K und dem angegebenen Abstand d . Man erhält:

$$F_C = \frac{1}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{Q^2}{r^2}$$

Für die Kraft F_C betrachtet man die vektorielle Zerlegung der an einer der beiden Kugeln angreifenden Kräfte nach der Auslenkung (vergl. Abb. 3.7, dort nicht maßstabsgerecht). Die Masse m der Kugel erfährt im Gravitationsfeld der Feldstärke g die Gewichtskraft F_g senkrecht nach unten. Diese lässt sich in zwei Komponenten zerlegen: F_s in Richtung des Fadens - sie bewirkt eine Spannung des Fadens - und senkrecht dazu die Kraft F_R , die ein Zurückschwingen des Pendels bewirken würde. Der Winkel φ , der sich an der Aufhängung einstellt, findet sich auch zwischen F_s und F_g wieder. Da die drei Kräfte ein rechtwinkliges Dreieck bilden, lässt sich F_R aus F_g und φ berechnen, man erhält:

$$F_R = F_g \cdot \sin(\varphi) = m \cdot g \cdot \sin(\varphi)$$

Der Winkel φ lässt sich aus der Fadenlänge ℓ und dem Abstand d berechnen, wobei nur eine Hälfte von d einem Pendel zuzordnen ist. Hier gilt

$$\tan(\varphi) = \frac{\frac{d}{2}}{\ell} = \frac{d}{2\ell} \Rightarrow \varphi = \arctan\left(\frac{d}{2\ell}\right)$$

Aus dem Kräftegleichgewicht zwischen F_R und F_C kann man nun durch Einsetzen der Beziehungen nach der einzigen unbekanntem Größe Q auflösen:

$$F_C = F_R \Rightarrow \frac{1}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{Q^2}{r^2} = m \cdot g \cdot \sin\left(\arctan\left(\frac{d}{2\ell}\right)\right) \Rightarrow Q = r \cdot \sqrt{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot m \cdot g \cdot \sin\left(\arctan\left(\frac{d}{2\ell}\right)\right)}$$

Mit $r = 2 \cdot r_K + d$ erhält man

$$Q = (2 \cdot 16 \cdot 10^{-3} \text{ m} + 3 \cdot 10^{-3} \text{ m}) \cdot \sqrt{4\pi \cdot 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{V} \cdot \text{m}} \cdot 3,2 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \sin\left(\arctan\left(\frac{3 \cdot 10^{-3} \text{ m}}{2 \cdot 0,8 \text{ m}}\right)\right)}$$

$$Q = 2,83 \cdot 10^{-9} \text{ C} = 2,83 \text{ nC}$$

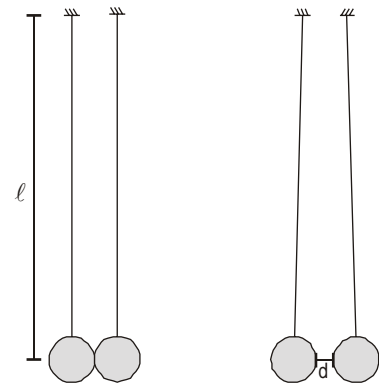


Abb. 3.6: Tischtennisbälle vor (links) und nach der Aufladung

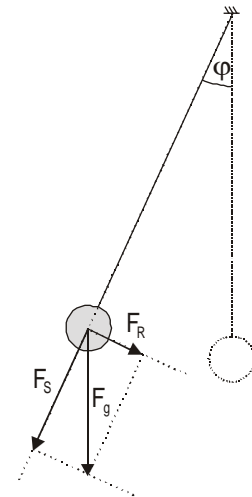


Abb. 3.7: Vektorielle Zerlegung der Kräfte an einem Fadenpendel

3.5 Auf- und Entladung eines Kondensators

Damit zwischen den beiden Platten eines Kondensators ein elektrisches Feld entstehen kann, müssen die Platten jeweils mit einer entgegengesetzt gerichteten Ladung versehen werden. Während des Aufladevorgangs bewegen sich also Ladungen von einer Ladungsquelle zu den Platten: es fließt ein Strom. Als Ladungsquelle kann eine Spannungsquelle dienen, da zwischen deren Polen eine Potenzialdifferenz (= Spannung) besteht, die dann auch zwischen den beiden Kondensatorplatten auftreten muss. Wegen des unvermeidlichen ohmschen Widerstandes eines Leiters kann dieser Aufladestrom nicht unendlich groß werden, folglich benötigt der Ladevorgang eine gewisse Zeit. Zur genaueren Analyse dieses Prozesses ist eine Schaltung nach Abb. 3.8 geeignet.

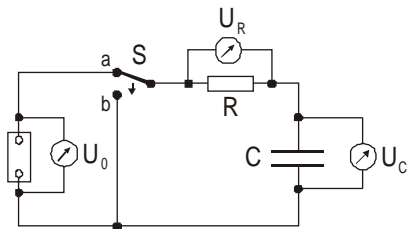


Abb. 3.8: Schaltung zur Untersuchung der Aufladung eines Kondensators

Zum Zeitpunkt t_0 werde der Schalter S von der Stellung b in die Stellung a gebracht, die Ladung auf C ist in diesem Moment noch gleich 0. Nach Glg. (3.19) gilt für die Spannung am Kondensator

$$U_C(t) = \frac{Q(t)}{C} \quad (3.24)$$

also ist zum Zeitpunkt des Umschaltens des Schalters $U_C(t_0) = 0 \text{ V}$. R und C bilden eine Reihenschaltung, nach dem Kirchhoffschen Gesetz über die Teilspannungen in einer Reihenschaltung gilt zu jedem Zeitpunkt, dass die Summe der Teilspannungen gleich der anliegenden Gesamtspannung ist. In diesem Fall gilt also:

$$U_0 = U_R(t) + U_C(t) \quad (3.25)$$

Da zum Zeitpunkt t_0 $U_C(t_0) = 0 \text{ V}$ ist, fällt also die gesamte Spannung U_0 an R ab. Nach dem Ohmschen Gesetz wird also der Anfangsstrom im Stromkreis allein durch R und U_0 bestimmt:

$$U_R(t) = U_0 \Rightarrow I(t_0) = \frac{U_0}{R} \quad (3.26)$$

Im Zeitintervall Δt wird durch diesen Strom $I(t_0)$ eine Ladungsmenge ΔQ auf die Kondensatorplatten transportiert:

$$\Delta Q = I(t_0) \cdot \Delta t \quad (3.27)$$

nach Ablauf des Zeitintervalls beträgt gilt für Spannung und Ladung an den Kondensatorplatten nunmehr

$$U_C(t_0 + \Delta t) = \frac{\Delta Q}{C} \quad (3.28)$$

$$Q(t_1) = \Delta Q \quad (3.29)$$

Zum Zeitpunkt $t_1 = t_0 + \Delta t$ gibt es nun also zwei Teilspannungen ungleich Null, die sich zur Gesamtspannung addieren. Folglich ist zum Zeitpunkt t_1 die Spannung am Widerstand um den Betrag der Spannung am Kondensator geringer, was zu einem kleineren Strom $I(t_1)$ führt. Im nächsten gleichgroßen Zeitintervall ergibt sich also eine geringere zusätzliche Ladung $\Delta Q'$, die der bereits vorhandenen Ladung des Kondensators zugeführt wird und zu seiner weiteren Aufladung beiträgt:

$$U_R(t_1) = U_0 - U_C(t_1) \Rightarrow I(t_1) = \frac{U_0 - U_C(t_1)}{R} \quad (3.30)$$

$$Q(t_2) = Q(t_1) + \Delta Q' \quad (3.31)$$

Allgemein erhält man für die Berechnung der Spannung am Kondensator für das n-te Zeitintervall durch schrittweises Einsetzen der Glg. (3.27) bis (3.31) die Iterationsanweisung

$$U_C(t_n) = U_C(t_{n-1}) + \frac{U_0 - U_C(t_{n-1})}{R \cdot C} \cdot \Delta t \quad (3.32)$$

3.5.1 Iterative Berechnung der Aufladung

Die obige Verfahrensweise erlaubt eine schrittweise Berechnung z.B. mit Hilfe einer Tabellenkalkulation. Man benötigt zwei Spalten für t und $U_C(t)$. Die Anfangswerte der ersten Zeile (Zellen A2 und B2) sind durch die vorgegebenen Anfangs-

bedingung $t_0 = 0$ und $U_C(t_0) = 0$ festgelegt. In den weiteren Zeilen wird in der Spalte „t“ die Iterationsbedingung für das Zeitintervall, in der Spalte „UC“ die Formel nach Glg. 3.32 eingetragen, wobei der Bezug für $U_C(t_{n-1})$ auf die darüber liegende Zelle zeigt. In den Spalten C bis F sind die Konstanten eingetragen, sodass man mit

	A	B	C	D	E	F
1	t	UC	DT=	0,3	U0=	10
2	0	0	R=	1000	C=	1E-3
3	=A2+\$D\$1	=B2+(\$E\$1-B2)/(\$D\$2*\$F\$2)*\$D\$1				
4	=A3+\$D\$1	=B3+(\$E\$1-B3)/(\$D\$2*\$F\$2)*\$D\$1				
5				

Abb. 3.9: Tabellenblattausschnitt mit Formelbezügen zur iterativen Berechnung der Aufladung eines Kondensators

den absoluten Zellbezügen (z.B. \$D\$1) in der Formel darauf Bezug nehmen kann, ohne dass beim Kopieren von Zellen (Tabelle in den Spalten A und B ab Zeile 3 nach unten ausfüllen) der Verweis entsprechend neu berechnet wird (absoluter Zellbezug). Ohne die \$-Zeichen werden Zellbezüge als relative Bezüge behandelt und beim Kopieren automatisch angepasst.

Abb. 3.10 zeigt die sich daraus ergebende Tabelle sowie die graphische Darstellung. Man erkennt deutlich, dass die Spannung an dem Kondensator am Anfang steil ansteigt, bis die Kurve schließlich in eine Asymptote übergeht, die durch die Quellenspannung von $U_0 = 10$ V bestimmt wird. Betrachtet man die Tabelle genauer, so erkennt man, dass nach 0,6 s ca. 50%, nach 1,2 s ca. 75% und nach 1,8 s ca. 88% der Quellenspannung erreicht wird, d.h., nach jeweils 0,6 s halbiert sich die noch verbleibende Differenz zwischen U_C und U_0 . Dieses Verhalten weist auf einen exponentiellen Zusammenhang zwischen U_C und t hin.

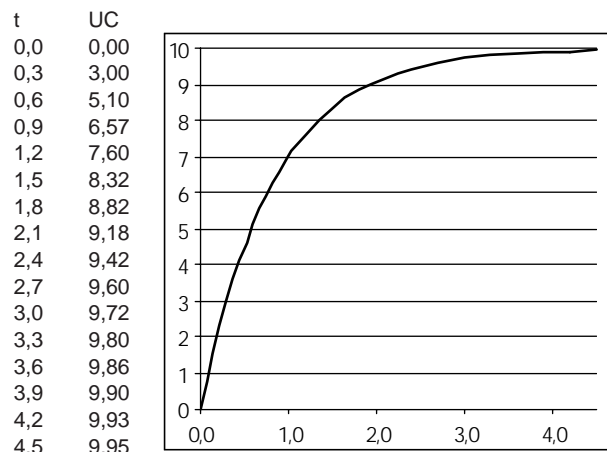


Abb. 3.10: Tabelle und graphische Darstellung der Tabellenwerte nach dem Verfahren von Abb. 3.9

3.5.2 Iterative Berechnung der Entladung

Wird nach hinreichend langer Zeit der Schalter S wieder in die Position b gebracht, läuft der bei der Aufladung beschriebene Prozess in umgekehrter Richtung ab, der vollständig aufgeladene Kondensator wird nun aber über den Widerstand entladen. Prinzipiell gelten nun die gleichen Überlegungen wie zuvor, doch sind die Anfangsbedingungen anders zu setzen. Zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ ist $U_C(t_0) = U_0$, mit jedem Zeitintervall Δt fließt aber ein bestimmter Teil der Ladung ab, sodass die Spannung am Kondensator und damit der Strom durch den Widerstand für das nächste Intervall abnimmt. Abb. 3.11 zeigt die entsprechenden Formeln für die Iteration.

	A	B	C	D	E	F
1	t	UC	DT=	0,3	U0=	10
2	0	=\$F\$1	R=	1000	C=	1E-3
3	=A2+\$D\$1	=B2-B2/(\$D\$2*\$F\$2)*\$D\$1				
4	=A3+\$D\$1	=B3-B3/(\$D\$2*\$F\$2)*\$D\$1				
5				

Abb. 3.11: Tabellenblattausschnitt mit Formelbezügen zur iterativen Berechnung der Entladung eines Kondensators

3.5.3 Analytische Berechnung der Entladung

Auch für die Entladung gilt das Kirchhoffsche Gesetz, nach dem die Summe der Teilspannungen gleich der Gesamtspannung sein muss. In der Position b des Schalters addieren sich die Spannungen an R und C zu Null, also gilt zu jedem Zeitpunkt t der Entladung:

$$U_R(t) + U_C(t) = 0 \tag{3.33}$$

Für die Spannung an einem Widerstand R gilt nach dem Ohmschen Gesetz die Beziehung

$$U_R(t) = I(t) \cdot R \tag{3.34}$$

und für die Spannung am Kondensator nach Glg. (3.19)

$$U_C(t) = Q(t) \cdot \frac{1}{C} \tag{3.35}$$

Strom und Ladung hängen zusammen, da der Transport einer Ladung einen Stromfluss bewirkt. Aus der vereinfachten Definition des Stromes als

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

erhält man den Momentanwert des Stromes als

$$I(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{d}{dt} Q(t) = \dot{Q}(t) \quad (3.36)$$

das heißt, der Strom ist die Ableitung der zeitabhängigen Funktion für die Ladung. Setzt man Glg. (3.36) in (3.34) ein, so ergibt sich für Glg. (3.33) der Ausdruck

$$\dot{Q}(t) \cdot R + Q(t) \cdot \frac{1}{C} = 0 \quad (3.37)$$

In dieser Gleichung treten die beiden zeitabhängigen Funktionen $Q(t)$ und $\dot{Q}(t)$ auf, wobei letztere die 1. Ableitung der Ausgangsfunktion nach der Zeit ist. Eine derartige Gleichung bezeichnet man als **Differenzialgleichung**. Division durch R überführt diese Gleichung in die Form

$$\dot{Q}(t) = -\frac{1}{R \cdot C} \cdot Q(t) \quad (3.38)$$

Wie man daraus ablesen kann, muss es sich bei $Q(t)$ um eine Funktion handeln, deren 1. Ableitung bis auf einen konstanten Faktor mit der Ausgangsfunktion übereinstimmt. Einen möglichen Lösungsansatz bieten hier die Exponentialfunktionen der Form

$$f(x) = a \cdot e^{b \cdot x}$$

denn deren Ableitung hat die Form

$$f'(x) = a \cdot b \cdot e^{b \cdot x} = b \cdot f(x)$$

und erfüllen somit die obige Bedingung. Ein Lösungsansatz für $Q(t)$ ist somit

$$Q(t) = a \cdot e^{b \cdot t} \quad (3.39)$$

mit der Ableitungsfunktion

$$\dot{Q}(t) = a \cdot b \cdot e^{b \cdot t} = b \cdot Q(t) \quad (3.40)$$

wobei die beiden Parameter a und b zu bestimmen sind. Einsetzen von Glg. (3.39) und (3.40) in (3.38) ergibt den Ausdruck

$$b \cdot Q(t) = -\frac{1}{R \cdot C} \cdot Q(t) \quad (3.41)$$

und nach Division durch $Q(t)$ erhält man den ersten Parameter b zu

$$b = -\frac{1}{R \cdot C}$$

Den Parameter a erhält man durch die Angabe der Startbedingung, dass zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ die Spannung am Kondensator $U_C(t_0) = U_0$ ist. Durch die Angabe der Spannung ist auch nach Glg. (3.19) auch $Q(t_0)$ bekannt, man erhält wegen $e^0 = 1$:

$$Q(t_0) = \frac{U_0}{C} = a \cdot e^{b \cdot 0} = a$$

Der Parameter a beschreibt also die Ladung auf dem Kondensator zum Zeitpunkt t_0 , diese wird deshalb als Q_0 bezeichnet. Somit kennt man nun beide Parameter der Funktion von $Q(t)$, und es gilt:

$$Q(t) = Q_0 \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}} \quad (3.42)$$

für die Spannung am Kondensator erhält man

$$U_C(t) = U_0 \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}} \quad (3.43)$$

3.5.4 Analytische Berechnung der Aufladung eines Kondensators

Der Vergleich der Vorgänge bei der Entladung mit denen der Aufladung zeigt, dass auch hier die gleichen Gesetzmäßigkeiten zu Grunde liegen. Die Summen der Teilspannungen ergeben sich hier durch die von der Spannungsquelle vorgegebene Gesamtspannung U_0 zu:

$$U_R(t) + U_C(t) = U_0 \quad (3.44)$$

Hier wie dort lassen sich die Teilspannungen durch die entsprechenden Gesetzmäßigkeiten ersetzen und man erhält die Differenzialgleichung (DGL)

$$\dot{Q}(t) \cdot R + Q(t) \cdot \frac{1}{C} = U_0 \quad (3.45)$$

Die Lösung dieser DGL gestaltet sich etwas aufwändiger als im vorherigen Fall, da hier noch ein konstanter Summand zu berücksichtigen ist. Eine Lösung ist die Funktion

$$U_C(t) = U_0 \cdot (1 - e^{-\frac{t}{R \cdot C}}) \quad (3.46)$$

Für $t_0 = 0$ wird $U_C(t_0) = 0$ (Anfangsbedingung), da $e^0 = 1$ ist, während nach hinreichend langer Zeit t sehr große Werte annimmt und damit e^{-t} gegen 0 geht, was bedeutet, dass $U_C(t)$ sich U_0 beliebig annähert.

3.6 Berechnungsbeispiele

3.6.1 Aufladung eines Kondensators

Ein Kondensator der Kapazität $C = 0,1 \mu\text{F}$ wird über einen Widerstand $R = 5 \text{ k}\Omega$ von einer Spannungsquelle mit der Spannung $U_0 = 24 \text{ V}$ aufgeladen. Zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ ist der Kondensator noch vollständig entladen. Wie lange dauert es, bis der Kondensator bis auf die Hälfte der Spannung U_0 aufgeladen ist?

Lsg.:

Gesucht ist t so, dass gilt:

$$U_C(t_{1/2}) = \frac{1}{2} \cdot U_0$$

Da es sich um eine Aufladung handelt, ist Glg. (3.46) zu verwenden. Also gilt

$$U_C(t_{1/2}) = \frac{1}{2} \cdot U_0 = U_0 \cdot (1 - e^{-\frac{t_{1/2}}{R \cdot C}})$$

Der Faktor U_0 lässt sich kürzen, es bleibt eine Gleichung, wo die gesuchte Größe $t_{1/2}$ im Exponenten steht:

$$\frac{1}{2} = 1 - e^{-\frac{t_{1/2}}{R \cdot C}}$$

Subtraktion von 1 und Multiplikation mit dem Faktor (-1) liefert eine Gleichung, die sich durch Logarithmieren lösen lässt:

$$\frac{1}{2} = e^{-\frac{t_{1/2}}{R \cdot C}} \Rightarrow \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{t_{1/2}}{R \cdot C} \Rightarrow t_{1/2} = -R \cdot C \cdot \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

Einsetzen der Zahlenwerte ergibt

$$t_{1/2} = -5 \cdot 10^3 \Omega \cdot 0,1 \cdot 10^{-6} \text{ F} \cdot \ln\left(\frac{1}{2}\right) = 3,47 \cdot 10^{-4} \text{ s} = 0,347 \text{ ms}$$

Der Faktor $R \cdot C$ im Nenner des Exponenten wird als **Zeitkonstante** des RC-Gliedes bezeichnet. Er gibt an, nach welcher Zeit sich die Spannung am Kondensator um den Faktor $1/e$ geändert hat. Multipliziert man diese Zeitkonstante mit dem Faktor $\ln(1/2)$, so entspricht das einer Basistransformation von der Basis e zur Basis 2 :

$$U_0 \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}} = U_0 \cdot 2^{-\frac{t}{t_{1/2}}}$$

4 Das magnetisches Feld

Im Gegensatz zum Gravitationsfeld und zum elektrischen Feld wird ein magnetisches Feld durch eine Größe erzeugt, die in Bewegung ist. Während die ersten beiden Feldarten eine Vielzahl von Gemeinsamkeiten haben, erfordert das magnetische Feld weitergehende Überlegungen.

Als felderzeugende Größe wird in 1.1 eine bewegte Ladung angegeben, wie sie z.B. in einem stromdurchflossenen Leiter anzutreffen ist. Ein einfaches Experiment stellt die entsprechenden Abhängigkeiten anschaulich dar. Dazu wird in den Raum zwischen den Schenkeln eines Hufeisenmagneten ein gerades Leiterstück der Länge ℓ eingeführt, der von einem Strom I durchflossen wird. Das Leiterstück ist mit einer Aufhängung versehen, die eine Auslenkung quer zur Leiterachse erlaubt. Die auf das Leiterstück ausgeübte Kraft lässt sich an der Auslenkung ablesen (vergl. Ladungspendel in 3.4.3). Variiert man die Leiterlänge ℓ und die Stromstärke I , so zeigt sich jeweils eine Proportionalität zwischen der variierten Größe und der auslenkenden Kraft:

$$F \sim \ell \quad (4.1)$$

$$F \sim I \quad (4.2)$$

Wie auch bei den anderen beiden Feldarten wird die magnetische Feldstärke B als Maß für die Kraft auf eine Probegröße festgelegt, man erhält

$$F = I \cdot \ell \cdot B \quad (4.3)$$

Für die Einheit von B gilt

$$[B] = \frac{[F]}{[I] \cdot [\ell]} = \frac{1 \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{1 \text{ A} \cdot 1 \text{ m}} = 1 \frac{\text{kg}}{\text{A} \cdot \text{s}^2}$$

diese Einheit wird als 1 T (Tesla) bezeichnet.

4.1 Betrag und Richtung der wirkenden Kraft

In Glg. (4.3) sind die drei Größen F , I und B vektorielle Größen (ℓ ist eine skalare Länge, nicht zu verwechseln mit einer vektoriellen Strecke). Die im Experiment beobachtete Kraftwirkung steht dabei senkrecht zur Stromrichtung von I und senkrecht zur Richtung des Magnetfeldes. In vektorieller Schreibweise ist daher das Kreuzprodukt zu verwenden, es gilt:

$$\vec{F} = \ell \cdot \vec{I} \times \vec{B} \quad (4.4)$$

Die Orientierung dieser drei Größen im Raum kann man sich mit der „Drei-Finger-Regel“ (oft auch „UVW-Regel“ genannt) visualisieren. Dabei zeigt der Daumen in Richtung der Ursache (technische Stromrichtung), der Zeigefinger in Richtung der Vermittlung (Richtung des Magnetfeldes), der abgewinkelte Mittelfinger gibt dann die Richtung der Wirkung (Kraftrichtung) an. Sind Stromrichtung und magnetische Feldrichtung nicht senkrecht zueinander, reduziert sich die resultierende Kraft. Ihr Betrag kann berechnet werden durch den Ausdruck

$$F = \ell \cdot I \cdot B \cdot \sin(\angle \vec{I}, \vec{B}) \quad (4.5)$$

4.2 Lorentz-Kraft auf bewegte Ladungen

Die auf den Leiter ausgeübte Kraft ist nicht auf eine Wechselwirkung zwischen dem Leitermaterial und dem Magnetfeld zurückzuführen, sondern auf eine Kraft, die auf die sich im Inneren des Leiters bewegenden Ladungen wirkt. Die Summe aller dieser Kräfte ist die auf den Leiter wirkende Kraft, da die Ladungen an die Atome des Leitermaterials gebunden sind.

Der Zusammenhang zwischen Strom und Ladung nach

$$I = \frac{Q}{\Delta t} = \frac{z \cdot q}{\Delta t} \quad (4.6)$$

beschreibt einen Strom I über die Anzahl z von Elementarladungen, die pro Zeiteinheit durch den Leiter fließen. Befinden

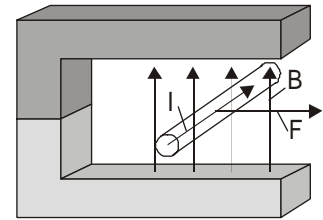


Abb. 4.1: Kraftwirkung auf ein stromdurchflossenes Leiterstück in einem Magnetfeld

sich in einem Leiter der Länge ℓ eine Anzahl von z Elektronen, so legen diese im Zeitintervall Δt eine bestimmte Strecke zurück. Jedes Elektron hat also eine Geschwindigkeit v , für die gilt:

$$v = \frac{\ell}{\Delta t} \quad (4.7)$$

Löst man Glg. (4.7) nach Δt auf und setzt diesen Ausdruck in (4.6) ein, so erhält man für I die Beziehung

$$I = \frac{Q \cdot v}{\ell} = \frac{z \cdot q \cdot v}{\ell} \quad (4.8)$$

Eingesetzt in die Glg. (4.3) ergibt sich daraus für die Kraft auf den Leiter

$$F = \frac{z \cdot q \cdot v}{\ell} \cdot \ell \cdot B = z \cdot q \cdot v \cdot B \quad (4.9)$$

die von allen z Elektronen gemeinsam auf den Leiter ausgeübt wird. Für ein einzelnes Elektron ergibt sich daraus die sog. **Lorentz-Kraft**

$$F_L = q \cdot v \cdot B \quad (4.10)$$

die sich analog zu Glg. (4.4) ebenfalls vektoriell darstellen lässt mit

$$\vec{F}_L = q \cdot \vec{v} \times \vec{B} \quad (4.11)$$

Die Richtung der Kraft ergibt sich ebenfalls wieder aus den Richtungen von v und B , da hier aber v die Bewegungsrichtung von Elektronen angibt, die eine negative Ladung besitzen, muss die Richtung von F_L umgedreht werden. Verwendet man bei der „Drei-Finger-Regel“ die linke Hand, ergibt sich die Richtung von F_L vorzeichenrichtig (physikalische Stromrichtung).

4.2.1 Der Hall-Effekt zur Magnetfeldmessung

Eine spezielle Wirkung der Lorentz-Kraft erlaubt das Ausmessen von Magnetfeldern. Dazu wird ein Leiter in ein Magnetfeld verbracht und von einem Strom durchflossen. Verhindert man eine Bewegung des Leiters, in dem man ihn fixiert, wirkt zwar noch die Lorentzkraft auf die Leitungselektronen, der Leiter kann sich jedoch nicht mehr bewegen. Deshalb bewirkt die Lorentz-Kraft eine Verschiebung der Elektronen im Inneren des Leiters senkrecht zur Stromrichtung und senkrecht zum Magnetfeld, das den Leiter durchdringt. Diese Ladungsverschiebung bewirkt eine Spannung zwischen den beiden gegenüberliegenden Seiten des Leiters, die soweit anwächst, bis die dadurch ausgeübte Kraft des elektrischen Feldes F_{el} im Gleichgewicht ist mit der Lorentz-Kraft F_L .

Nach Glg. (3.4) und (3.15) ergibt sich für die elektrostatische Feldkraft

$$F_{el} = q \cdot E = q \cdot \frac{U_H}{b} \quad (4.12)$$

da die Spannung an den beiden Seiten des Quaders abgegriffen wird, die den Abstand b voneinander haben. Aus der oben angegebenen Gleichgewichtsbedingung ergibt sich folglich

$$F_{el} = F_L \Leftrightarrow q \cdot \frac{U_H}{b} = q \cdot v \cdot B \quad (4.13)$$

Kürzen von q und Auflösen nach U_H ergibt

$$U_H = b \cdot v \cdot B \quad (4.14)$$

Die Hallspannung ist also bei fester Breite b des Quaders und konstanter Ladungsträgergeschwindigkeit v proportional zur magnetischen Feldstärke B , was somit nach einer entsprechenden Eichung eine Messung von B durch das Messen der Hallspannung U_H erlaubt.

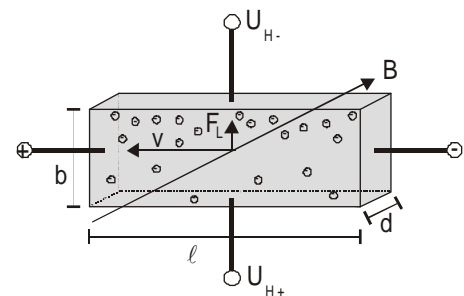


Abb. 4.2: Lorentz-Kraft in einem quaderförmigen Leiter und daraus resultierende Verschiebung der Leitungselektronen

4.2.2 Driftgeschwindigkeit und Stromstärke beim Hall-Effekt

Die in Glg. (4.14) für den Hall-Effekt maßgeblich Driftgeschwindigkeit ist auf direktem Wege nicht zu messen, wohl aber der Strom I , der die Bewegung der Leitungselektronen im Inneren des Leiters bewirkt. Gibt n die Anzahl der Elektronen pro Volumeneinheit an (sog. **Teilchendichte**), so ergibt sich für den Strom analog zu Glg. (4.8)

$$I = \frac{n \cdot V \cdot q}{\Delta t} = \frac{n \cdot b \cdot \ell \cdot d \cdot q}{\Delta t} \quad (4.15)$$

Mit Glg. (4.7) erhält man daraus

$$I = n \cdot b \cdot v \cdot d \cdot q \Rightarrow v = \frac{I}{n \cdot b \cdot d \cdot q} \quad (4.16)$$

und kann nun durch Ersetzen von v einen Ausdruck für die Hall-spannung U_H erhalten, der auf der rechten Seite der Gleichung bis auf die Teilchendichte n nur noch direkt messbare Größen enthält:

$$U_H = \frac{1}{n \cdot q} \cdot \frac{I}{d} \cdot B \quad (4.17)$$

Die Breite b des Quaders spielt folglich keine Rolle, dafür wird der Hall-Effekt umso größer, je kleiner die Dicke d des Quaders ist. Da der für die Stromleitung relevante Querschnitt des Leiters durch das Produkt $b \cdot d$ bestimmt wird, muss man also den Quader möglichst breit machen, damit er durch die unvermeidliche Erwärmung vom Messstrom I nicht zerstört wird.

Der erste Faktor ist stoffspezifisch, er wird als Hall-Konstante bezeichnet und mit R_H abgekürzt:

$$U_H = R_H \cdot \frac{I}{d} \cdot B \quad (4.18)$$

Der Hall-Effekt wird entscheidend durch die Teilchendichte n bestimmt: je kleiner sie ist, desto ausgeprägter ist der Hall-Effekt. Bei einem metallischen Leiter ist die Teilchendichte sehr hoch, da viele Atome des Kristallgefüges ein Leitungselektron beisteuern können. Anders ist es bei dotierten Halbleitern, dort werden die frei verfügbaren Ladungsträger vor allem durch die zugesetzten Fremdatome beigesteuert, damit ist dort die Teilchendichte um 5 bis 10 Zehnerpotenzen geringer als bei Metallen. Dünne Halbleiter-Plättchen werden deswegen bevorzugt zur Magnetfeldmessung eingesetzt (**Hall-Sonden**). Eine Zusammenstellung einiger Hall-Konstanten zeigt die Tabelle in Abb. 4.3. Man erkennt deutlich den Unterschied zwischen gut leitenden Metallen wie Silber oder Kupfer im Vergleich zu dem Halbleitermaterial InAs. Das positive Vorzeichen bei Cadmium und Zink weist darauf hin, dass auch eine Stromleitung durch Fehlstellen (sog. „Löcher“) möglich ist, wie man sie sonst schon von p-dotierten Halbleitern her kennt.

Stoff	R_H in m^3/C
Kupfer	$-5,3 \cdot 10^{-11}$
Silber	$-8,9 \cdot 10^{-11}$
Bismut	$-5,0 \cdot 10^{-7}$
Indium-Arsenid	$-1,0 \cdot 10^{-4}$
Cadmium	$+6,0 \cdot 10^{-11}$
Zink	$+1,0 \cdot 10^{-10}$

Abb. 4.3: Tabelle mit den Hall-Konstanten einiger Stoffe

4.3 Magnetfeld stromdurchflossener Leiter

4.3.1 Magnetfeld eines gestreckten Leiters

Für das Leiterschaukel-Experiment nach Abb. 4.1 wurde das magnetische Feld zwischen den Polschuhen eines Permanentmagneten verwendet. Doch auch jeder stromdurchflossene Leiter erzeugt in seiner Umgebung ein Magnetfeld. Wie bereits in Abb. 1.3 angedeutet, bilden die Feldlinien konzentrische Kreise um den Mittelpunkt des Leiters, wobei die Kreisebene senkrecht zur Ausrichtung des Leiters steht. Für deren Richtung gibt es eine „Faustregel“: zeigt der Daumen der rechten Hand in Richtung der (technischen) Stromrichtung, so deuten die den Leiter umschließenden Finger in die Richtung der Feldlinien.

Misst man das Feld eines solchen Leiters z.B. mit einer Hallsonde aus, so erhält man die beiden Proportionalitäten

$$B \sim I \quad \text{und} \quad B \sim \frac{1}{r} \quad (4.19)$$

Nach der Definition der Stromstärkeneinheit fließt ein Strom von 1 A, wenn zwischen zwei parallelen, unendlich langen

Leitern, die von einem Strom von 1 A durchflossen werden, in einem Abstand von 1 m pro Meter Leiterlänge eine Kraft von $2 \cdot 10^{-7}$ N hervorgerufen wird. Betrachtet man einen der beiden Leiter als felderzeugende Größe, so erzeugt er nach dieser Definition ein magnetisches Feld der Flussdichte B, sodass auf den zweiten Leiter als Probekörper eine Kraft F wirkt nach:

$$F = I \cdot \ell \cdot B \tag{4.20}$$

Die Proportionalität von Glg. (4.19) ergibt nach Einführen eines Proportionalitätsfaktors k die Gleichung

$$B = k \cdot \frac{I}{r} \tag{4.21}$$

Einsetzen von (4.21) in (4.20) und Auflösen nach k ergibt die Beziehung

$$F = I \cdot \ell \cdot k \cdot \frac{I}{r} \Rightarrow k = \frac{F \cdot r}{\ell \cdot I^2} \tag{4.22}$$

Die bei der Ampere-Definition vorgegebenen Beträge der hier auftretenden Größen ergeben

$$k = \frac{2 \cdot 10^{-7} \text{ N} \cdot 1 \text{ m}}{1 \text{ m} \cdot (1 \text{ A})^2} = 2 \cdot 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{A}^2} = 2 \cdot 10^{-7} \frac{\text{V} \cdot \text{s}}{\text{A} \cdot \text{m}} \tag{4.23}$$

Anders als beim Gravitationsfeld und beim elektrischen Feld bilden die Feldlinien des magnetischen Feldes immer geschlossene Linien, haben also keinen Anfang oder Ende. Im einfachsten Fall - wie beim hier betrachteten geraden Leiter - sind dies konzentrische Kreise. Zur vollständigen Erfassung einer solchen Feldlinie muss der Kreis einmal umfahren werden, was nach mathematischer Konvention des Bogenmaßes einem Winkel von 2π entspricht, wobei $2\pi \cdot r$ den Umfang des umschriebenen Kreises angibt. Das Produkt der in Glg. (4.23) angegebenen Konstante k mit 2π wird als magnetische Feldkonstante bezeichnet und mit μ_0 abgekürzt:

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{V} \cdot \text{s}}{\text{A} \cdot \text{m}} \tag{4.24}$$

Damit erhält man für die Feldstärke B im Abstand r von einem Leiter, der von einem Strom I durchflossen wird, die Beziehung

$$B = \mu_0 \cdot \frac{I}{2\pi \cdot r} \tag{4.25}$$

4.3.2 Magnetfeld einer langen Spule

Verformt man einen geraden Leiter zu einem Kreis, so erhält man eine Spule mit einer Windung (auch Leiterschleife genannt). Wird diese Spule von einem Strom durchflossen, bildet sich um jeden Leiterabschnitt wieder ein konzentrisches Magnetfeld aus (vergl. Abb. 4.4). Im Inneren der Spule überlagern sich die einzelnen Feldlinien, sodass dort die magnetische Flussdichte größer ist als außerhalb der Spule.

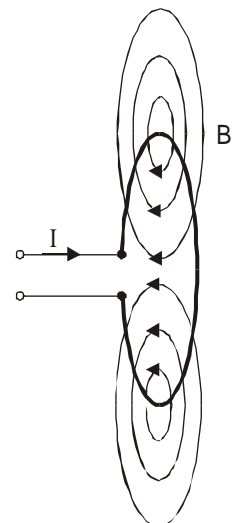


Abb. 4.4: Feldlinienbild einer Leiterschleife

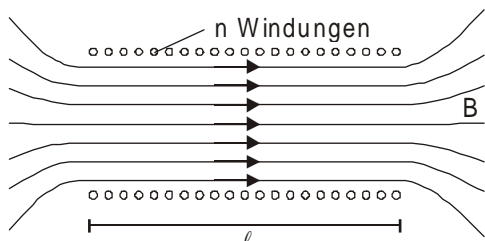


Abb. 4.5: Feldlinienbild einer einlagigen zylindrischen Spule der Länge l mit n Windungen

Werden n solcher Leiterschleifen parallel zueinander angeordnet, so entsteht eine einlagige, zylindrische Spule mit n Windungen. Abb. 4.5 zeigt das dabei entstehende Feldlinienbild, dass sich nach Überlagerung der einzelnen Feldlinien jeder der n Leiterschleifen ergibt. Im Inneren bildet sich ein starkes, homogenes Feld aus, während außerhalb der Spule nur ein schwaches, inhomogenes magnetisches Feld entsteht.

Das Ausmessen des Feldes im Inneren der Spule ergibt die Beziehung

$$B = \mu_0 \cdot \frac{I \cdot n}{l} \tag{4.26}$$

4.4 Teilchen in Feldern

Bislang wurden vor allem Ladungen betrachtet, die sich in oder auf einem Material befinden und je nach Situation ein elektrisches oder magnetisches Feld erzeugen. Die beschriebenen Gesetzmäßigkeiten gelten jedoch auch für geladene Teilchen, die sich frei im Raum befinden. Da Elektronen oder Ionen in Luft sich nicht frei bewegen können, da sie durch Stöße mit den Luftmolekülen ständig gestört werden, setzen die meisten Versuche ein stark verdünntes Gas oder ein Vakuum voraus.

4.4.1 Erzeugung freier Elektronen

Um freie Elektronen zu erhalten, müssen diese aus der äußersten Hülle eines Atoms entfernt und anschließend aus dem Material herausgelöst werden, das von diesen Atomen gebildet wird.

In Gasen bezeichnet man diesen Vorgang als **Ionisation**, dabei wird durch einen Stoß mit einem Nachbaratom oder -molekül der Hülle soviel Energie zugeführt, dass ein Elektron herausgeschlagen wird. Solange dieses Elektron nicht von einem anderen Ion wieder eingefangen wird (**Rekombination**), steht es als freies Elektron zur Verfügung. Da die Temperatur eines Gases ein Maß für die mittlere Energie der Gasatome oder -moleküle ist, steigt die Ionisationswahrscheinlichkeit mit der Temperatur. Bei sehr hohen Temperaturen können alle Atome oder Moleküle ionisiert werden, ein solches Gas bezeichnet man als **Plasma**.

In Festkörpern dient ebenfalls eine hohe Temperatur zur Erzeugung von freien Elektronen. Ist die Temperatur hoch genug, so können einzelne Elektronen die Oberfläche des Festkörpers gegen die Anziehungskräfte der verbleibenden Atomrümpfe verlassen und treten in den freien Raum aus. Diesen Vorgang bezeichnet man als **Glühemission**. Häufig wird dabei ein Wolframdraht (Wolfram besitzt einen sehr hohen Schmelzpunkt) mit einer Metalloxidschicht überzogen, aus der die Elektronen erheblich leichter austreten können als aus dem Wolfram, was die Anzahl der emittierten Elektronen deutlich erhöht.

4.4.2 Beschleunigung von Elektronen

Um Elektronen für bestimmte Zwecke eine definierte Geschwindigkeit zu geben, müssen sie nach ihrer Freisetzung in einem elektrischen Feld beschleunigt werden. Ein solches System bezeichnet man treffend als „**Elektronenkanone**“. Wie in Abb. 4.6 zu sehen besteht sie aus einem Glühdraht (**Kathode**) und einem Metallblech als Gegenelektrode (**Anode**), das in der Mitte ein Loch aufweist. An die beiden Enden des Glühdrahts wird eine Spannungsquelle angeschlossen, durch den dabei fließenden Strom heizt sich die Kathode auf und emittiert in den freien Raum durch Glühemission Elektronen. Zwischen Kathode und Anodenblech wird eine zweite Spannungsquelle geschaltet, die die Anode mit einer positiven Polarität versieht. Die aus der Kathode ausgetretenen Elektronen werden im elektrischen Feld zwischen Kathode und Anode zur Anode hin beschleunigt. Die Elektronen, die das Loch passieren, treten in den feldfreien Raum hinter der Anode ein und fliegen dort mit konstanter Geschwindigkeit weiter.

Die Beschleunigung der Elektronen ergibt sich aus der elektrischen Feldstärke

$$E = \frac{U_A}{d} \quad (4.27)$$

der Kraft $F_{el} = q \cdot E$ und der Grundgleichung der Mechanik $F = m \cdot a$ zu

$$a = \frac{F_{el}}{m_e} = \frac{e}{m_e} \cdot \frac{U_A}{d} \quad (4.28)$$

wobei e die Ladung und m_e die Masse eines Elektrons und d der Abstand zwischen Kathode und Anode ist. Unter der Annahme eines homogenen Feldes zwischen Kathode und Anode handelt es sich um eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung. Die Zeit vom Verlassen der Kathode bis zum Erreichen der Anode ergibt sich aus dem Weggesetz zu

$$s = d = \frac{1}{2} a \cdot t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2d}{a}} = \sqrt{\frac{2d^2 \cdot m_e}{e \cdot U_A}} \quad (4.29)$$

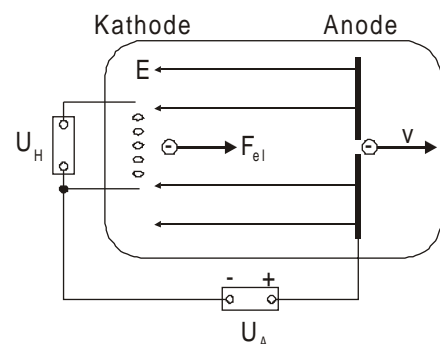


Abb. 4.6: „Elektronenkanone“ mit äußerer Beschaltung

Für die Geschwindigkeit am Ende der Beschleunigungsstrecke erhält man

$$v = a \cdot t = \frac{e}{m_e} \cdot \frac{U_A}{d} \cdot d \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot m_e}{e \cdot U_A}} = \sqrt{2 \cdot \frac{e}{m_e} \cdot U_A} \quad (4.30)$$

Da die Länge der Beschleunigungsstrecke d aus der Gleichung herausfällt, ist die Endgeschwindigkeit v ausschließlich vom Quotienten e/m_e und der Beschleunigungsspannung U_A abhängig.

Alternativ lässt sich ein Ausdruck für die Geschwindigkeit auch über die Definition der Spannung als Potenzialdifferenz gewinnen. Als Quotient von Arbeit pro Ladung beschreibt diese, welche Energie pro Ladung beim Durchlaufen einer Potenzialdifferenz aufgenommen wird. Diese potenzielle Energie wird vollständig in Bewegungsenergie umgewandelt, also gilt:

$$E_{\text{pot}} = e \cdot U_A = \frac{1}{2} m_e \cdot v^2 = E_{\text{kin}} \quad (4.31)$$

Auflösen nach v liefert ebenfalls

$$v = \sqrt{2 \cdot \frac{e}{m_e} \cdot U_A} \quad (4.32)$$

4.4.3 Elektrostatische Ablenkung von Elektronen

Auf Ladungen wirkt im elektrischen Feld eine Kraft F_{el} in Richtung des elektrischen Feldes, wodurch sie beschleunigt werden. Dies trifft auch zu, wenn sich die Elektronen in einem solchen Feld bereits bewegen. Ein Sonderfall liegt vor, wenn die Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = v_x$ senkrecht zur Richtung des elektrischen Feldes $E = E_y$ gerichtet ist. Eine entsprechende Anordnung zeigt Abb. 4.7, wobei die Elektronenkanone nicht mit eingezeichnet ist. Zwischen den planparallelen Platten des Ablenkcondensators besteht ein homogenes elektrisches Feld, das so gerichtet ist, dass die Kraft nach in y -Richtung unten gerichtet ist. Es ergibt sich in dieser Richtung eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung des Elektrons. In x -Richtung wirkt keine Kraft, also bleibt die ursprüngliche Geschwindigkeitskomponente v_x unverändert. Dies entspricht den Verhältnissen beim waagerechten Wurf, somit ergibt sich als Flugbahn für das Elektron eine Parabel.

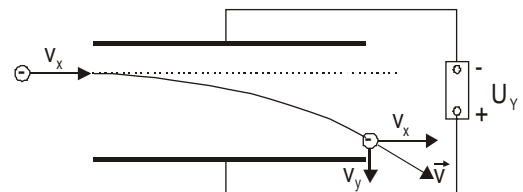


Abb 4.7: Ablenkung von Elektronen im homogenen Feld eines Plattenkondensators

Da die resultierende Geschwindigkeit nach Verlassen des Ablenkfeldes größer ist als die Eintrittsgeschwindigkeit, hat sich die Energie des Elektrons durch die (in der Regel geringfügig) Ablenkung vergrößert.

Trifft das Elektron anschließend auf einen Leuchtschirm, der die Energie des auftreffenden Elektrons in sichtbares Licht umwandelt, lässt sich dieser Auftreffpunkt durch Variieren der Spannung U_y beeinflussen. Eine Herleitung der entsprechenden vollständigen Bahnkurve ergibt, dass die Auslenkung s_y auf dem Schirm proportional zur Spannung U_y ist.

Ordnet man ein weiteres Plattenpaar so an, dass dessen elektrisches Feld senkrecht zum ersten orientiert ist und ebenfalls senkrecht zur Flugrichtung der in das Feld eintretenden Elektronen, so kann man den Elektronenstrahl auch in der Querichtung zu s_y auslenken. Beide Auslenkungen zusammen erlauben es, den Elektronenstrahl durch die beiden Ablenkspannungen über die gesamte Fläche des Leuchtschirms zu lenken. Auf diesem Prinzip beruht die **Braunsche Röhre**, wie sie in **Oszilloskopen** benutzt wird.

4.4.4 Magnetische Ablenkung von Elektronen

Lässt man ein Elektron mit einer Geschwindigkeit v in ein homogenes magnetisches Feld der Flussdichte B eintreten, wirkt auf Grund der Lorentz-Kraft ebenfalls eine Kraft, die die Bahn des Elektrons verändert. Da diese Kraft zu jedem Zeitpunkt senkrecht zu v steht, wird keine Arbeit verrichtet, im Gegensatz zur Ablenkung im elektrischen Feld bleibt also die Energie des Elektrons unverändert. Die Richtung der Kraft zwingt das Elektron dabei auf eine Kreisbahn mit dem Radius r . Dabei tritt eine Zentrifugalkraft F_z auf, die der Lorentz-Kraft F_L als Zentripetalkraft das Gleichgewicht hält. Zu jedem Zeitpunkt der Bewegung gilt also die Gleichgewichtsbedingung

$$F_L + F_Z = 0 \tag{4.33}$$

Einsetzen der entsprechenden Gleichungen ergibt

$$e \cdot v \cdot B = m_e \cdot \frac{v^2}{r} \tag{4.34}$$

wenn v und B bekannt sind, lässt sich der Bahnradius r berechnen nach

$$r = \frac{m_e}{e} \cdot \frac{B}{v} \tag{4.35}$$

Mit Glg. (4.32) lässt sich v auf die messbare Beschleunigungsspannung zurückführen, mit denen die Elektronen in der Elektronenkanone beschleunigt wurden. Man erhält:

$$r = \frac{m_e}{e} \cdot B \cdot \sqrt{2 \cdot \frac{e}{m_e} \cdot U_A} = B \cdot \sqrt{2 \cdot \frac{m_e}{e} \cdot U_A} \tag{4.36}$$

Aus der Messung von r , B und U_A erhält man einen Wert für den Quotienten e/m_e , der als **spezifische Ladung des Elektrons** bezeichnet wird, es gilt

$$\frac{e}{m_e} = \frac{2 \cdot U_A}{B^2 \cdot r^2} \tag{4.37}$$

Hinreichend genaue Messungen haben dafür den Wert

$$\frac{e}{m_e} = 1,76 \cdot 10^{11} \frac{C}{kg} \tag{4.38}$$

ergeben. Mit der bekannten Ladung eines Elektrons

$$e = 1,602 \cdot 10^{-19} C \tag{4.39}$$

ergibt sich damit die Masse eines Elektrons zu

$$m_e = 9,109 \cdot 10^{-31} kg \tag{4.40}$$

Die unterschiedliche Ablenkung von geladenen Teilchen in Abhängigkeit ihrer spezifischen Ladung erlaubt es mit einer Anordnung nach Abb. 4.8, ein **Massenspektrometer** zu konstruieren. Je nach Masse werden sich bei gleicher Ladung z.B. ionisierter Atome unterschiedliche Bahnradien ergeben, was bei hinreichend hoher Genauigkeit eine Unterscheidung verschiedener Isotope eines Elementes erlaubt, sofern die Eintrittsgeschwindigkeit in das magnetische Feld bekannt ist.

4.4.5 Das Wiensche Geschwindigkeitsfilter

Eine besondere Anordnung erhält man, wenn eines homogenes elektrischen und ein homogenes magnetisches Feld so angeordnet werden, dass ihre Feldlinien parallel verlaufen (vergl. Abb. 4.9). Tritt ein geladenes Teilchen mit einer Geschwindigkeit v senkrecht in den felderfüllten Raum, so wirken sowohl die elektrostatische Kraft F_{el} als auch die Lorentzkraft F_L . Sind die Richtungen dieser Kräfte entgegengesetzt, so können sie sich unter bestimmten Bedingungen aufheben:

$$F_{el} + F_L = 0 \tag{4.41}$$

Einsetzen der entsprechenden Gesetzmäßigkeiten für (bewegte) Ladungen in diesen beiden Feldern liefert

$$q \cdot E = q \cdot v \cdot B \Rightarrow v = \frac{E}{B} \tag{4.42}$$

Die Gleichgewichtsbedingung ist also genau dann erfüllt, wenn die geladenen Teilchen eine Geschwindigkeit v haben, die durch die Feldstärken E und B vorgegeben sind. Bei Teilchen anderer Geschwindigkeit überwiegt entweder die elektrostatische Anziehung oder die Lorentz-Kraft - in beiden Fällen würden die Teilchen nicht geradlinig die Anordnung durchlaufen.

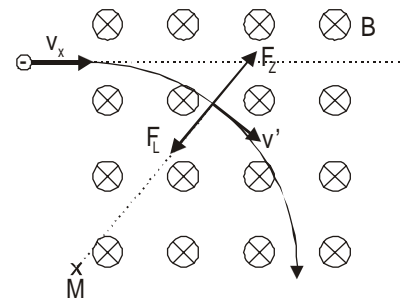


Abb. 4.8: Ablenkung von Elektronen im homogenen magnetischen Feld (hier in die Papierebene hinein gerichtet)

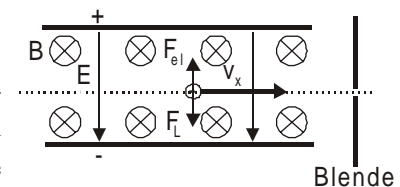


Abb. 4.9: Wiensches Geschwindigkeitsfilter